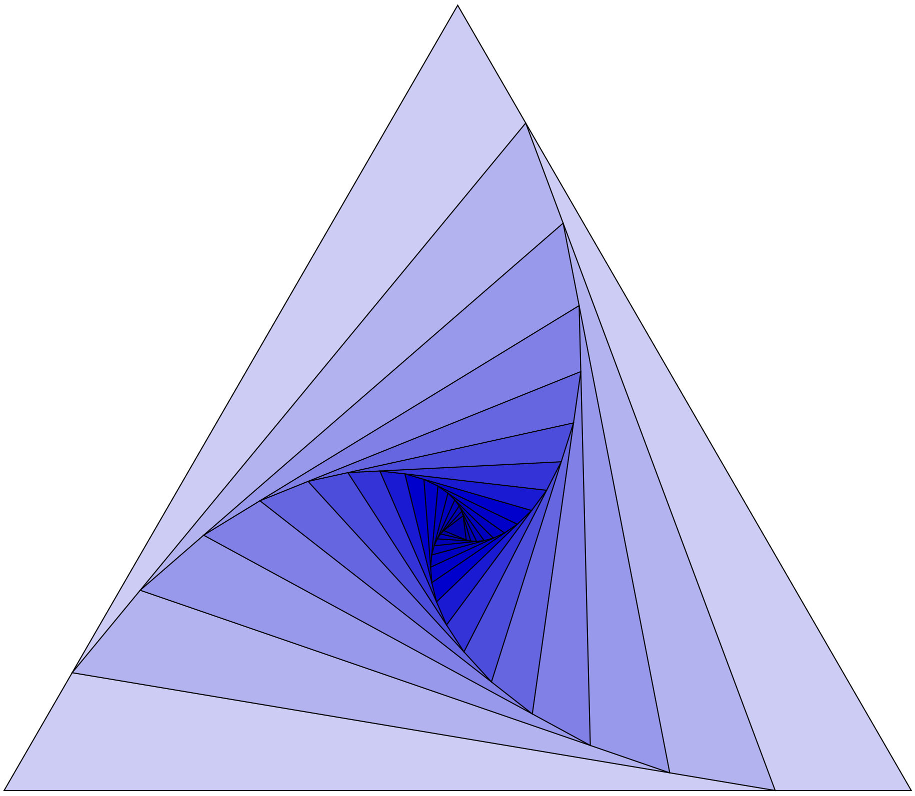
Elementos de ecuaciones diferenciales ordinarias



Javier Gómez Gil

Versión 1.13

Versión 1.13 de 16 de enero de 2017.

Departamento de Análisis Matemático
de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Índice general

CAPÍTULO 1

Introducción a las ecuaciones diferenciales

Una **ecuación diferencial** es una ecuación en la que aparecen relacionadas una función incógnita, de una o varias variables, algunas de sus derivadas[1] y posiblemente sus variables.

Si la función incógnita es una función de una variable la ecuación diferencial se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria**. Si la función incógnita es de varias variables la ecuación diferencial se dice que es una **ecuación en derivadas parciales**. En este curso únicamente estudiaremos ecuaciones diferenciales ordinarias.[2]

Una ecuación diferencial ordinaria se puede expresar de manera general como una ecuación de la forma

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

donde F es una función conocida e $y = y(x)$ es la función incógnita. Si se puede despejar la derivada de mayor orden, la ecuación se puede escribir en la forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}). \tag{1.2}$$

Cuando la ecuación viene expresada de esta manera se dice que la ecuación diferencial está en **forma normal** o **estándar**.

Ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias son las ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} y' - 2xy = 0 & \qquad y'(1 - \operatorname{sen} y) = \cos x \\ y''' = e^{-y} + x - x^2 & \qquad y'' - y' - x = \operatorname{sen} x \end{array}$$

[1] Si la función es de dos o más variables estas derivadas serán derivadas parciales.

[2] Por este motivo a lo largo de esta notas siempre que empleemos la expresión *ecuación diferencial* nos estaremos refiriendo a una *ecuación diferencial ordinaria*.

En la práctica se suelen adaptar las notaciones empleadas al contexto en el que se está trabajando. Así si, por ejemplo, la función incógnita varía con el tiempo se suele utilizar la variable t en lugar de la x, o si la propia función incógnita hace referencia a longitudes medidas en una recta o temperaturas se utilizan las letras x o T en lugar de y.

También es habitual utilizar la notación dy/dx para hacer referencia a las derivadas en lugar de la notación con primas. Con esta notación las ecuaciones del ejemplo precedente se escriben:

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0 \qquad \frac{dy}{dx}(1 - \operatorname{sen} y) = \cos x$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^{-y} + x - x^2 \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - x = \operatorname{sen} x$$

Si la variable no aparece explícitamente en la ecuación esta se denomina **autónoma**. Por ejemplo, la ecuación

$$y' = -2y^3 + 1$$

es autónoma.

Se denomina **orden** de una ecuación diferencial ordinaria al orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación. En los ejemplos anteriores las dos ecuaciones de la primera línea son de primer orden y las de la segunda fila son de tercer y segundo orden respectivamente.

1.1. Solución de una ecuación diferencial. Solución general

Una **solución** de una ecuación diferencial ordinaria es una función que en algún intervalo satisface la ecuación.[3] Más precisamente, si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, una solución de la ecuación diferencial (1.1) en I es una función y definida y n veces derivable en I que verifica la igualdad

$$F\left(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)\right) = 0$$

para todo $x \in I$.

Por ejemplo, la función

$$y(x) = e^{x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{1.3}$$

es una solución de la ecuación

$$y' - 2xy = 0 \tag{1.4}$$

[3] Las soluciones de una ecuación diferencial también se denominan en ocasiones **integrales** de la ecuación.

porque
$$y'(x) = 2xe^{x^2} = 2xy(x)$$
para todo $x \in \mathbb{R}$. Procediendo de forma análoga, se comprueba que, para cada $c \in \mathbb{R}$, la función
$$y(x) = ce^{x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{1.5}$$
también es solución de la ecuación (1.4). Además cualquier solución de esta ecuación es de la forma (1.5). Para comprobar esto basta con observar que si y es una solución de la ecuación, llamando y_1 a la función que aparece en (1.3), se verifica que
$$\left(\frac{y}{y_1}\right)'(x) = \frac{y'(x)e^{x^2} - 2xy(x)e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \frac{2xy(x) - 2xy(x)}{e^{x^2}} = 0$$
para todo $x \in \mathbb{R}$, lo que implica que y/y_1 es constante y, por lo tanto, que y es de la forma (1.5) para alguna constante c.

En general no todas las ecuaciones diferenciales tiene solución, como muestra, por ejemplo, la ecuación $(y')^2 + 1 = 0$.

Al conjunto de todas las soluciones de una ecuación diferencial se le denomina **solución general** de la ecuación. Por lo tanto, según hemos visto más arriba, la familia uniparamétrica de funciones (1.5) es la solución general de la ecuación (1.4). La solución (1.3) se dice que es una **solución particular** de la ecuación. Esta solución particular se obtiene de la solución general haciendo $c = 1$.

La ecuación diferencial
$$y' = 2x(1-y)^2 \tag{1.6}$$
tiene una familia paramétrica de soluciones
$$y(x) = 1 - \frac{1}{x^2 - c}. \tag{1.7}$$
A diferencia del ejemplo anterior en este caso no todas las soluciones están definidas en el mismo intervalo e incluso, en algunos casos, para un mismo valor del parámetro existen soluciones definidas en diferentes intervalos. Así, para $c < 0$ la solución está definida en todo $\mathbb{R}$, mientras que para $c = 0$ hay una solución definida en $(-\infty, 0)$ y otra en $(0, +\infty)$, y para $c > 0$ hay tres soluciones definidas en los intervalos $(-\infty, -\sqrt{c})$, $(-\sqrt{c}, \sqrt{c})$ y $(\sqrt{c}, +\infty)$. Además hay una solución adicional $y \equiv 1$. Esta solución no se obtiene de (1.7) para ningún valor de la constante c. Una solución de este tipo se dice que es una **solución singular** de la ecuación. Aunque la familia uniparamétrica (1.7) no proporciona todas las soluciones de la ecuación (1.6), algunos autores denominan solución general a dicha familia, empleando en algunos casos la

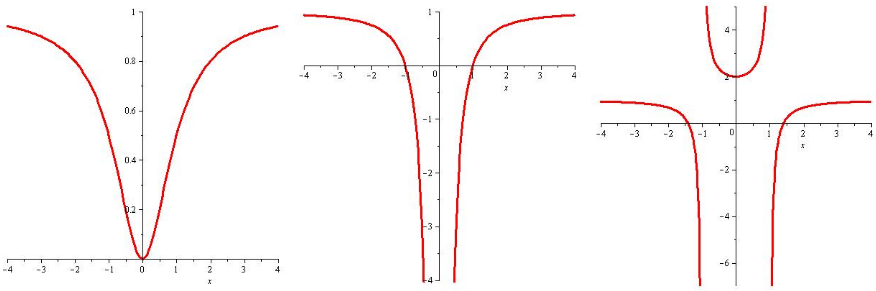


Figura 1.1: Gráficas de las funciones (1.7) para $c = -1$, 0 y 1.

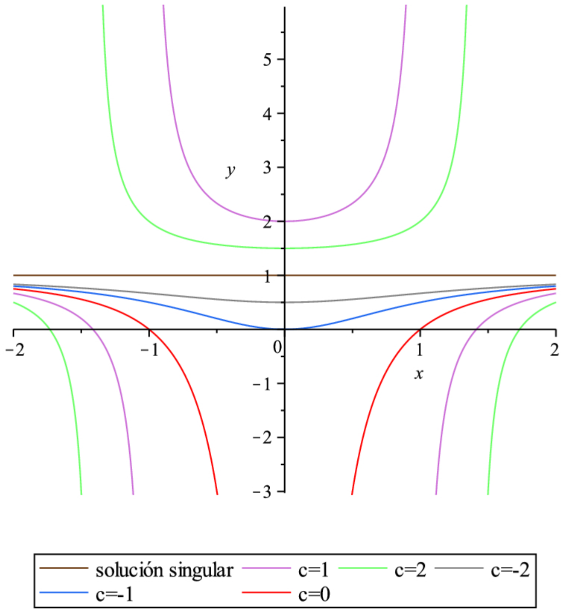


Figura 1.2: Algunas soluciones de la ecuación (1.6).

expresión **solución completa** para denominar a lo que nosotros llamamos solución general.

Consideremos ahora la ecuación

$$2x^2 y'' - (y')^2 = 0. \tag{1.8}$$

Operando convenientemente se comprueba que las funciones

$$y(x) = \frac{2x}{c_1} - \frac{2}{c_1^2} \ln |1 + c_1 x| + c_2 \tag{1.9}$$

con c_1 y $c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 \neq 0$, son soluciones de la ecuación (1.8). También las funciones constantes y la familia de funciones

$$y(x) = x^2 + c \tag{1.10}$$

donde $c \in \mathbb{R}$, son soluciones de esta ecuación, aunque no están incluidas entre las anteriores. En este caso, a diferencia de los precedentes, no todos los posibles valores de los parámetros nos dan una solución, y la solución general viene definida por tres familias paramétricas de funciones. Este ejemplo muestra que la estructura de la solución general, incluso de ecuaciones de formulación sencilla, puede ser bastante más compleja que lo que mostraban los ejemplos precedentes.

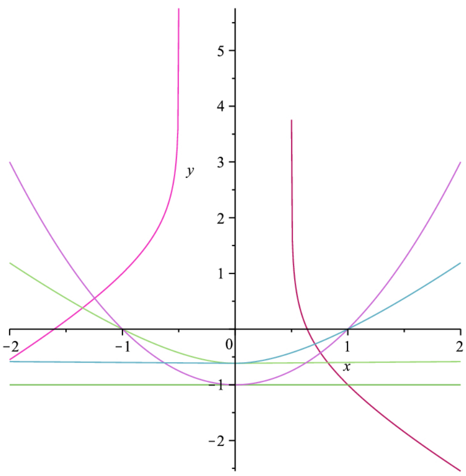


Figura 1.3: Algunas soluciones de la ecuación (1.8).

Veamos un último ejemplo. Se comprueba sin dificultad que las funciones $y(x) = \operatorname{sen} x$ e $y(x) = \cos x$ y, en general, cualquier función de la forma

$$y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{1.11}$$

con c_1 y $c_2 \in \mathbb{R}$, son soluciones de la ecuación

$$y'' + y = 0. \tag{1.12}$$

Se puede demostrar, como veremos más adelante, que la familia biparamétrica (1.11) es la solución general de la ecuación. Se observa que, en este caso, la familia de soluciones depende de dos parámetros. Este no es un hecho casual pues en general suele ser cierto, aunque no siempre es así, que el número de parámetros de los que depende la familia paramétrica que aparece en la solución general de una ecuación diferencial, o la solución general salvo algunas soluciones singulares, suele coincidir con el orden de la ecuación.

Cuando la solución de la ecuación, como en (1.3), en (1.7) o en (1.11), viene dada exclusivamente en términos de su variable y constantes se dice que es una **solución explícita**. Sin embargo, en ocasiones nos podemos encontrar con soluciones que vienen dadas mediante expresiones de la forma $g(x, y) = 0$ donde g es un función. En este caso se dice y es una **solución implícita**.

Ejemplo 1.1.1. Cualquier función $y = y(x)$[4] que satisfaga la relación

$$y = \operatorname{sen} x - \cos y$$

es una solución implícita de la ecuación

$$y'(1 - \operatorname{sen} y) = \cos x.$$

Como muestra este ejemplo no siempre es sencillo, e incluso en ocasiones posible, despejar la función incógnita en una solución implícita para obtener una solución explícita.

Supongamos que g es una función de clase C^1 en algún subconjunto abierto del plano[5] y consideremos la familia de sus curvas de nivel

$$g(x, y) = c. \tag{1.13}$$

Obviamente puede haber valores de c para los que la correspondiente curva de nivel sea vacía o degenerada. En lo que sigue consideraremos únicamente aquellos valores de c para los que la correspondiente curva es no vacía y existe al menos un punto en el que $\partial g/\partial y$ es no nula. Derivando (1.13) se tiene que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} y' = 0.$$

Esto nos dice que la familia de curvas $g(x, y) = c$ es una familia uniparamétrica de soluciones implícitas de la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}. \tag{1.14}$$

Ejemplo 1.1.2. Si $g(x, y) = x^2 + y^2$, la argumentación precedente nos muestra que la familia

$$x^2 + y^2 = c \tag{1.15}$$

es una familia de soluciones de la ecuación diferencial

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Obviamente c ha de ser positivo porque en caso contrario la curva de nivel definida por (1.15) es o vacía o un punto. En este caso no es difícil despejar y en (1.15) para obtener las soluciones de forma explícita

$$y(x) = \pm\sqrt{c - x^2}.$$

Como puede observarse, en este caso, para cada valor $c > 0$, la ecuación (1.15) nos proporciona no una sino dos soluciones de la ecuación diferencial. En general, siempre que tengamos una solución de una ecuación diferencial dada en forma implícita, existirá más de una solución de la ecuación que satisfaga dicha expresión implícita.

[4] El teorema de la función implícita garantiza la existencia de tales funciones.

[5] Una función es de clase C^1 si admite derivadas parciales y estas son continuas. Toda función de clase C^1 es diferenciable.

1.2. Problemas de valor inicial

Como hemos visto en los ejemplos de la sección precedente en muchas ocasiones las ecuaciones diferenciales tiene infinitas soluciones. Sin embargo, con frecuencia no estaremos interesados en todas las soluciones sino solamente en aquellas que cumplan ciertas condiciones. Estas condiciones pueden tomar muchas formas pero los dos tipos más importantes son las que se denominan *condiciones iniciales y condiciones de contorno*.

Condiciones iniciales son aquellas condiciones que han de satisfacer la posible solución, y en su caso sus derivadas, en un punto dado. Más precisamente, por condiciones iniciales de la ecuación de orden n

$$F\left(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)\right) = 0 \tag{1.16}$$

entenderemos el conjunto de las n condiciones de la forma

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \tag{1.17}$$

donde $y_0, \ldots, y_{n-1}$ son constantes y x_0 es un punto fijo.

Por ejemplo, en la ecuación (1.4), si se impone la condición inicial $y(0) = 0$, se obtiene que la única soluciones que verifica esta condición es la función $y \equiv 0$. De manera análoga la única solución de la ecuación (1.8) que satisface la condiciones iniciales

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

es la función

$$y(x) = \operatorname{sen} x.$$

Por **condiciones de frontera o de contorno** se entienden aquellas condiciones sobre la solución que esta o sus derivadas han de cumplir en dos o más puntos. Por ejemplo, la solución de la ecuación (1.12) que satisface las condiciones de contorno

$$y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

es la función

$$y(x) = \cos x - \operatorname{sen} x.$$

Al conjunto formado por la ecuación (1.16) y las condiciones iniciales (1.17) se le denomina **problema de valor inicial**.

Ejemplo 1.2.1. Consideremos la ecuación de primer orden

$$xy' - 2y + 4 = 0. \tag{1.18}$$

Es obvio que no hay ninguna solución de la anterior ecuación que satisfaga la condición inicial $y(0) = 0$. Se puede comprobar que la única solución que satisface la condición $y(1) = 2$ es la función constante $y \equiv 2$. Sin embargo, para la condición inicial $y(0) = 2$ existen infinitas soluciones de la forma

$$y(x) = 2 + cx^2 \tag{1.19}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

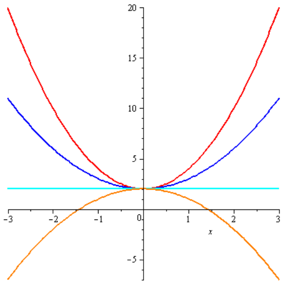


Figura 1.4: Soluciones del problema de valor inicial $xy' - 2y + 4 = 0$, $y(0) = 2$ de la forma (1.19) con $c = -1, 0, 2$ y 3.

Como vemos en este ejemplo las situaciones que se pueden dar al tratar de resolver un problema de valor inicial pueden ser muy variadas. Esto hace que nos planteemos dos cuestiones que son fundamentales en el estudio de las ecuaciones diferenciales. ¿En qué condiciones podemos garantizar que una ecuación diferencial tiene solución? y, supuesto que tiene al menos una solución y dicha solución verifica una condición inicial dada, ¿cuándo se puede afirmar que esa solución es la única que verifica dicha condición? El primero es el problema de *existencia* y el segundo el de *unicidad* de soluciones de una ecuación diferencial.

En el ejemplo precedente, como la ecuación era sencilla y se podían calcular fácilmente sus soluciones, no ha sido complicado mostrar que para ciertos valores iniciales el problema correspondiente no tenía solución, tenía una o tenía infinitas. Sin embargo, son muy pocas las ecuaciones diferenciales que se pueden resolver explícitamente, lo que hace necesario tener resultados que garanticen la existencia y unicidad de las soluciones. El siguiente teorema nos da condiciones suficientes, bastante generales y fáciles de verificar, para la existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales y problemas de valor inicial de primer orden.

Teorema 1.2.2. *Sea f una función continua en un rectángulo abierto del plano, $\mathsf{R} = (a, b) \times (c, d)$, y sea $(x_0, y_0) \in \mathsf{R}$. Entonces el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.20}$$

tiene una solución en algún intervalo abierto $I \subset (a, b)$, con $x_0 \in I$. Si además la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ también es continua en R, entonces la solución del problema (1.20) es única.

Este teorema en realidad reúne en un único enunciado dos teoremas clásicos. La primera parte del teorema anterior, la que hace referencia a la existencia, se conoce con el nombre de **teorema de Peano**. El teorema de existencia y unicidad se conoce como **teorema de Picard**.

Como hemos indicado más arriba este teorema sólo da condiciones suficientes para la existencia y unicidad de soluciones. Si dichas condiciones no se cumplen puede ocurrir que no existan soluciones o que, si existen, no sean únicas.

Volviendo al ejemplo 1.2.1, obsérvese que la función

$$f(x, y) = \frac{2y - 4}{x}$$

está definida y es continua sólo en $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$. Además, para todo $y \in \mathbb{R}$ y todo $x \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2}{x},$$

también es continua en $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$. Obviamente, ni f ni $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en la recta $x = 0$ pues ni tan siquiera están definidas en ella. Por lo tanto el teorema 1.2.2 no nos proporciona ninguna información acerca de las soluciones de la ecuación (1.18) que satisfacen una condición inicial en el punto $x_0 = 0$. Sin embargo, para cualquier valor inicial $y(x_0) = y_0$, con $x_0 \neq 0$ el teorema sí nos dice que hay una única solución. Todo lo anterior concuerda con lo que hemos visto en el ejemplo 1.2.1.

1.3. Campos de direcciones

Como hemos señalado en la sección precedente tan sólo unos pocos ejemplos simples de ecuaciones diferenciales se pueden resolver explícitamente en términos de funciones elementales. Incluso en el caso de ecuaciones diferenciales de primer orden no es fácil encontrar una solución de este tipo. Sin embargo el hecho de que no se pueda resolver explícitamente una ecuación o el que las soluciones encontradas sean de difícil manejo no significa que no se pueda obtener información útil acerca del comportamiento y las características de las soluciones. Esto es lo que se conoce como **estudio cualitativo** de la ecuación diferencial.

En el caso de ecuaciones diferenciales de primer orden un punto de partida para el estudio cualitativo de una ecuación puede ser el tratar de hacerse una idea gráfica del aspecto y comportamiento de las soluciones de la ecuación sin necesidad de calcularlas previamente.

Consideremos una ecuación diferencial de primer orden expresada en forma normal

$$y' = f(x, y) \tag{1.21}$$

donde f es una función que está definida en alguna región del plano. Las posibles soluciones de esta ecuación son funciones cuyas gráficas están contenidas en dicha región. Estas gráficas se denominan **curvas integrales** o **curvas soluciones** de la ecuación (1.21). La condición (1.21) nos dice que la tangente a la curva integral que pasa por (x, y), si existe, tiene pendiente $f(x, y)$. Haciendo uso de este hecho podemos considerar asociado a la ecuación un campo vectorial, definido en la misma región que la función f, que asocia a cada punto de dicha región un vector cuya pendiente viene dada por el valor de la función f en dicho punto. Este campo vectorial se denomina **campo de direcciones** de la ecuación. Esto nos permite considerar la resolución de una ecuación diferencial desde otro perspectiva. Desde esta, resolver una ecuación diferencial consiste en encontrar una curva en el plano cuya tangente en cada punto tenga la misma dirección que el campo de direcciones en ese punto.

El campo de direcciones de una ecuación diferencial se puede visualizar eligiendo algunos puntos del dominio de f y situando con centro en cada uno de ellos un pequeño segmento rectilíneo (o una flecha pequeña) con pendiente el valor de la función f en el punto. De esta manera, cada segmento es tangente a la solución de la ecuación que pasa por su punto medio.

Esta labor, que realizada a mano puede resultar laboriosa y aburrida, se puede realizar fácilmente con la ayuda de alguno de los múltiples programas informáticos de cálculo numérico o calculo simbólico existentes.

Aunque, como acabamos de señalar, normalmente los campos de direcciones se representan haciendo uso de algún programa informático, puede resultar interesante realizar esta tarea a mano en alguna ocasión, con alguna ecuación no muy complicada, para apreciar mejor su significado. Un procedimiento que facilita esta labor es el que se conoce como **método de las isoclinas**. Dado un número real $c \in \mathbb{R}$ al conjunto de puntos que satisfacen la ecuación

$$f(x, y) = c \tag{1.22}$$

se le denomina **isoclina**. A lo largo de una isoclina todos los vectores del campo de direcciones son paralelos. Representando el campo de direcciones a lo largo de un número convenientemente elegido de isoclinas nos puede dar una visión precisa de la grafica de las soluciones. En particular la isoclina nula, es decir la que corresponde al valor $c = 0$ en la ecuación (1.22), nos indica donde se hallan los posibles extremos locales y los puntos de inflexión de las soluciones, mientras que las isoclinas correspondientes a valores positivos o negativos de la constante nos informan del crecimiento o decrecimiento, respectivamente, de las soluciones.

Consideremos la ecuación

$$y' = y. \tag{1.23}$$

Las isoclinas de esta ecuación son muy fáciles de representar. Son todas las rectas de ecuación $y \equiv c$ para $c \in \mathbb{R}$, o lo que es lo mismo, el conjunto de todas las rectas paralelas al eje de abscisas En la figura 1.5 aparecen

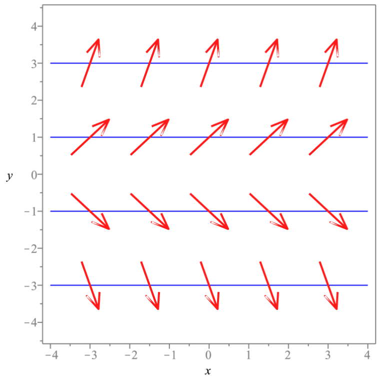


Figura 1.5: Isoclinas de la ecuación $y' = y$.

dibujadas en color azul las isoclinas de la ecuación $y' = y$ correspondientes a los valores de $c = -3, -1, 1$ y 3 en un rectángulo alrededor del origen. Una vez dibujadas las isoclinas es sencillo representar el campo de direcciones de la ecuación ya que, como hemos señalado anteriormente, todos los vectores sobre una misma isoclina tienen la misma pendiente. Obviamente, aumentando el número de isoclinas representadas se puede obtener una versión mas precisa del campo de direcciones que nos permite apreciar mejor los detalles del campo, como vemos en la figura 1.6 donde aparece una representación un poco más detallada que la de la figura 1.5 del campo de direcciones de la ecuación $y' = y$. En ambas figuras se observa cómo los vectores que aparecen

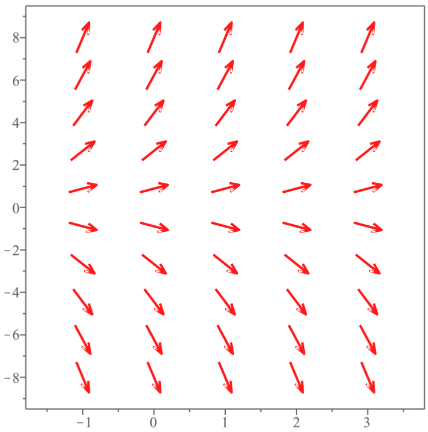


Figura 1.6: Campo de direcciones de la ecuación $y' = y$.

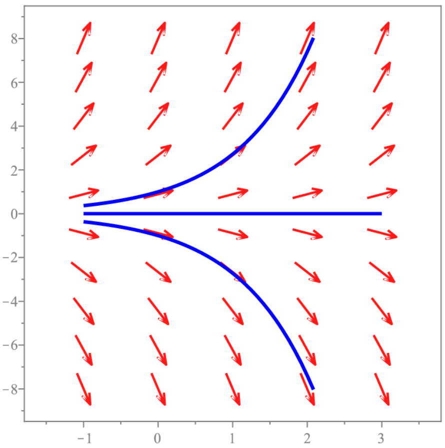


Figura 1.7: Soluciones de la ecuación $y' = y$ que pasan por los puntos $(0, -1)$, $(0, 0)$ y $(0, 1)$.

en la parte superior de la gráfica, es decir aquellos para los que $y > 0$, tienen pendiente positiva, mientra que los de la mitad inferior tienen pendiente negativa, lo que nos indica que las soluciones de la ecuación cuyas gráficas se encuentran en el semiplano $y > 0$ son crecientes mientras que aquellas cuyas gráficas se encuentran en el semiplano $y < 0$ son decrecientes.[6] También se observa viendo la figura 1.6 que, cuando x tiende a infinito, las soluciones cuya gráfica se encuentra en el semiplano superior $y > 0$ tienden a infinito, mientras que las del semiplano inferior tienden a $-\infty$, como podemos comprobar en la figura 1.7 donde aparecen representadas las soluciones de la ecuación que pasan por los puntos $(0, -1)$, $(0, 0)$ y $(0, 1)$.

Con la ayuda del campo de direcciones de la ecuación, no es difícil trazar a mano alzada la gráfica de una solución de manera aproximada. Para hacerlo, supuesto que ya tenemos el campo de direcciones dibujado, por ejemplo, en un rectángulo y que queremos trazar la solución que pasa por uno de los puntos del rectángulo, procederíamos como sigue. Para empezar trazaríamos una pequeña curva que pasase por el punto inicial y tangente al segmento del campo de direcciones que pasa por el punto. A continuación elegiríamos otro punto cercano al anterior, que fuese el centro de uno de los pequeños segmentos representados, y prolongaríamos la curva haciéndola pasar por este último punto de manera que fuese tangente al citado segmento. Repitiendo este proceso hasta que la curva llegue a los bordes del rectángulo obtendríamos una aproximación de la solución de la ecuación que pasa por el punto inicialmente elegido. Obviamente la aproximación obtenida se ajustará más a la solución real cuanto más pequeños segmentos tenga el campo de direcciones.

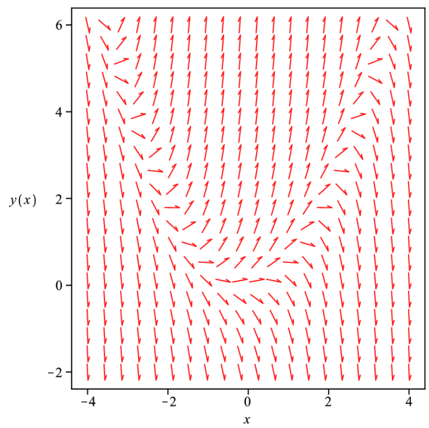


Figura 1.8: Campo de direcciones de la ecuación $y' = 2y - x^2$.

Ejemplo 1.3.1. En la figura 1.8 aparece representado el campo de direcciones de la ecuación

$$y' = 2y - x^2.$$

[6] Además es evidente, tanto analíticamente como gráficamente, que la función $y = 0$ es una solución de la ecuación diferencial.

Esa figura, que está realizada con la ayuda de un programa de ordenador que representa campos de direcciones, nos permite intuir de manera bastante precisa cómo van a ser las gráficas de sus soluciones y conjeturar cuál va a ser su comportamiento en infinito. En la figura 1.9 aparecen, dibujadas en

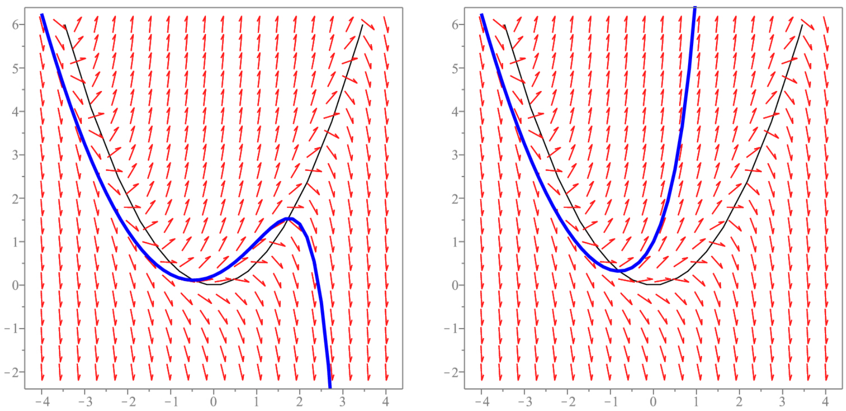


Figura 1.9: En color azul aparecen representadas las gráficas de dos soluciones de la ecuación $y' = 2y - x^2$. La curva de trazo negro es la isoclina nula.

azul, dos de las soluciones de la ecuación, representativas de los dos tipos de comportamiento que presentan en infinito las soluciones de la ecuación. La de la izquierda converge a $-\infty$ cuando x tiende a ∞ mientras que la segunda converge a ∞. En las dos gráficas de dicha figura también aparece representada, en color negro, la isoclina nula en la que, como ya hemos indicado anteriormente, se encuentran los extremos locales de las soluciones como se puede observar en los dibujos. Analizando el diagrama de direcciones de la ecuación parece evidente que todas aquellas soluciones que o bien su gráfica está siempre por debajo de la isoclina nula o la atraviesa en el semiplano $x \geqslant 0$, tienden a $-\infty$ cuando x tiende a ∞. Sin embargo, como muestran las dos soluciones representadas en la figura 1.9, no está claro cuál va a ser el comportamiento asintótico, es decir cuando x tiende a ∞, de las soluciones cuya gráfica está por encima de la isoclina nula para algún valor $x < 0$. Se deja al lector investigar cómo puede ser el comportamiento asintótico de esas soluciones.

Ejemplo 1.3.2. Consideremos la ecuación:

$$y' = xe^{-2x} - 2y \tag{1.24}$$

Su campo de direcciones aparece representado en la figura 1.10. Se puede observar cómo en este ejemplo, a diferencia del ejemplo precedente, todas las soluciones de la ecuación parecen tener un comportamiento asintótico semejante y tender a 0 cuando x tiende a $+\infty$. Si representamos algunas

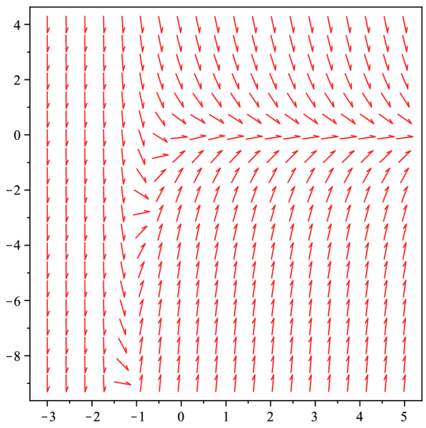


Figura 1.10: Campo de direcciones de la ecuación $y' = xe^{-2x} - 2y$.

soluciones particulares veremos cómo sus gráficas efectivamente se aproximan a 0 a medida que x crece (figura 1.11). Este ejemplo ilustra también una de

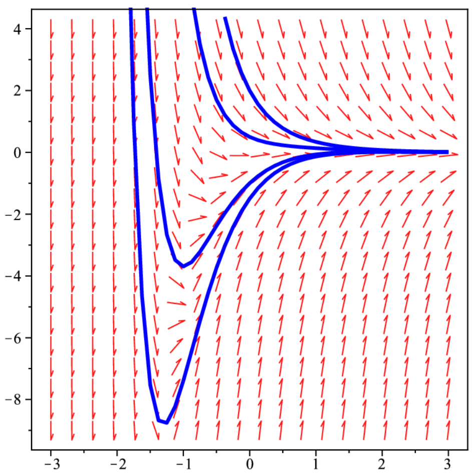


Figura 1.11: Soluciones de la ecuación $y' = xe^{-2x} - 2y$.

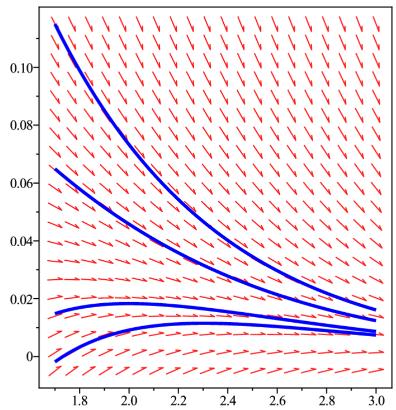


Figura 1.12: Detalle de la figura 1.11.

las diversas limitaciones de los métodos gráficos que han de ser tenidas en consideración si no se quieren cometer errores al trabajar con ellos. Si nos fijamos en la figura 1.11 parece que las cuatro curvas integrales coinciden a partir de un cierto valor. Sin embargo sabemos por el teorema 1.2.2 que por cada punto del plano únicamente puede pasar una curva integral. Esta aparente contradicción es sólo producto de un efecto óptico producido por el grosor del trazo de las gráficas representadas, como puede apreciarse en la figura 1.12 donde aparece ampliada, y a una escala adecuada, la parte de la figura 1.11 correspondiente al rectángulo $[1.7, 3] \times [-0.005, 0.115]$.

Como vemos por los ejemplos precedentes aunque, por las limitaciones del método, no podemos sacar conclusiones definitivas del análisis del campo de direcciones de una ecuación, sí nos sirve de punto de partida para nuestro estudio cualitativo de la ecuación permitiéndonos formular hipótesis verosímiles acerca del comportamiento de sus soluciones que deberán ser confirmadas o refutadas, si es posible, por otros medios.

1.4. Poligonales de Euler

En los capítulos siguientes veremos algunos métodos para resolver ecuaciones diferenciales de manera explícita. Sin embargo no siempre es posible obtener una solución, explícita o implícita, y en ocasiones aunque se tenga una solución no es posible expresarla por medio de funciones elementales. En todos estos casos, si la ecuación tiene solución, se puede intentar obtener una solución numérica aproximada. Existen varios métodos para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales algunos de los cuales veremos en un capítulo posterior. En esta sección partiendo de lo visto en la sección precedente vamos a hacer una primera aproximación al tema de la aproximación numérica de las soluciones de ecuaciones diferenciales estudiando el método de Euler. Este es el método numérico de aproximación de soluciones de una ecuación de primer grado más simple y, aunque en la práctica no suele ser utilizado, es interesante detenerse en él porque nos servirá de base para el estudio de métodos más complicados facilitándonos su comprensión.

En la sección precedente hemos descrito un procedimiento para esbozar la gráfica de una solución de una ecuación diferencial a partir de su campo de direcciones. Una idea muy parecida, haciendo uso de los segmentos del campo de direcciones en lugar de curvas, es la que se utiliza en el método de Euler, o método de las tangentes, para construir una poligonal que sirva de aproximación de la solución.

Para describir este método supongamos que queremos aproximar la solución, que suponemos que existe y además es única, del problema de valor inicial

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0. \tag{1.25}$$

Para comenzar se fija un número real $h > 0$, que se denomina **paso de la poligonal**. Habitualmente h es un número pequeño ya que, como veremos más adelante, el grado de aproximación alcanzado suele depender de su tamaño. A partir del punto (x_0, y_0) se define

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h. \tag{1.26}$$

Este es el valor de la ordenada del punto de la recta que pasa por (x_0, y_0) y de pendiente $f(x_0, y_0)$ cuya abscisa es $x_1 = x_0 + h$. El segmento de extremos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) es por tanto tangente a la solución de la ecuación (1.26) en el punto (x_0, y_0) y nos proporciona una aproximación a la solución en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$. Tenemos así definido el primer segmento de la poligonal. Ahora se repite el procedimiento partiendo de (x_1, y_1) y se define

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h \tag{1.27}$$

que es valor de la ordenada del punto de la recta que pasa por (x_1, y_1) y de pendiente $f(x_1, y_1)$ cuya abscisa es $x_2 = x_1 + h$. Los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son los extremos del segundo segmento de la poligonal. Así sucesivamente se definen

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + h \\ y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h \end{cases} \tag{1.28}$$

Mediante este procedimiento se obtienen de manera recurrente los valores aproximados de la solución, $y_1, y_2, \ldots$, para los valores $x_1, x_2 \ldots$ de la variable. Al método de definir las aproximaciones y_n en los puntos x_n, mediante las relaciones recurrentes (1.28) se le conoce con el nombre de **método de Euler**.

Si lo que se desea es no sólo una aproximación numérica de la solucion sino también una función que la aproxime, se pueden interpolar los puntos (x_n, y_n) con segmentos. De esta manera se obtiene una poligonal con vértices en dichos puntos. Dicha poligonal se denomina **poligonal de Euler** de paso h y viene dada por la fórmula

$$p(x) = y_n + (x - x_n)f(x_n, y_n), \tag{1.29}$$

para $x_{n-1} \leqslant x < x_n$ y $n = 1, 2, \ldots$.

Las poligonales de Euler sirven no sólo para aproximar soluciones de determinados problemas de valor inicial como acabamos de ver, sino que también pueden ser utilizadas para demostrar la existencia de dichas soluciones.[7]

Ejemplo 1.4.1. Como en la sección precedente vamos a considerar la ecuación $y' = y$. La sencillez de esta ecuación nos va a permitir hacer fácilmente las cuentas que debamos realizar y como además su solución general se calcula sin dificultad, podremos comparar cualquier solución particular con la aproximación obtenida aplicando el método de Euler.

Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{1.30}$$

Por el teorema 1.2.2, sabemos que el problema (1.30) tiene una única solución. Además es inmediato que dicha solución es la función $y(x) = e^x$.

[7] Una de las demostraciones mas habituales del teorema de Picard se basa en la construcción de una sucesión de poligonales de Euler que converge a una función que se demuestra que es la solución del problema.

Si queremos aproximar la solución del problema en el intervalo $[0,1]$ aplicando el método de Euler en N pasos, hemos de tomar un paso $h = \frac{1}{N}$ y, para $n = 1, 2, \ldots, N$,

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{n}{N} \\ y_n = y_{n-1} + y_{n-1}\dfrac{1}{N} = \left(1 + \dfrac{1}{N}\right) y_{n-1} \end{cases} \tag{1.31}$$

De esta última relación se deduce fácilmente por inducción que

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^n. \tag{1.32}$$

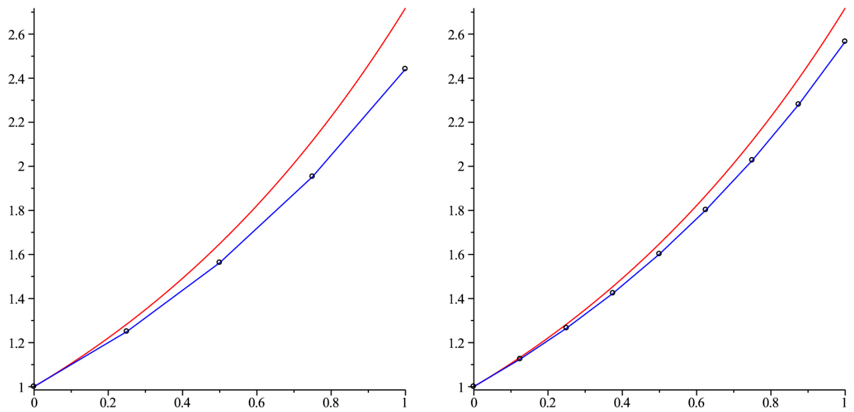


Figura 1.13: Solución exacta, en rojo, y poligonal de Euler, en azul, del problema de valor inicial $y' = y$, $y(0) = 1$ para $h = 0{,}25$ y $h = 0{,}125$.

En la figura 1.13 aparecen las gráficas de la solución del problema (1.30) y las poligonales de Euler de pasos $0,25$ y $0,125$, respectivamente, en el intervalo $[0,1]$. Puede observarse cómo las poligonales se separan de la solución exacta según nos alejamos del punto inicial y que la poligonal de tamaño de paso más pequeño se aproxima más a la solución exacta. Estos hechos aparecen cuantificados en el cuadro 1.1. En él se observa como, en términos absolutos, el error en $x = 1$ para $h = 0{,}25$ es un poco menos del doble que el que se tiene para $h = 0{,}125$. En términos relativos el error cometido[8] para el paso $h = 0{,}25$ es de aproximadamente un $10,19\,\%$ mientras que para $h = 0{,}125$ es de aproximadamente un $5,61\,\%$.

Si nos fijamos únicamente en los valores de las poligonales para $x = 1$ en el cuadro 1.2, donde aparecen recogidos los resultados que se obtienen en dicho punto para distintos tamaños de paso h y sus respectivos errores

[8] El error relativo es el cociente entre el error absoluto y el valor real.

x	$y\,(x)$	Euler	Error
0,0	1,0	1,0	0,0
0,2500	1,284	1,250	0,034
0,5000	1,649	1,562	0,087
0,7500	2,117	1,953	0,164
1,0	2,718	2,441	0,277

x	$y\,(x)$	Euler	Error
0,0	1,0	1,0	0,0
0,1250	1,133	1,125	0,008
0,2500	1,284	1,266	0,018
0,3750	1,455	1,424	0,031
0,5000	1,649	1,602	0,047
0,6250	1,868	1,802	0,066
0,7500	2,117	2,027	0,090
0,8750	2,399	2,281	0,118
1,0	2,718	2,566	0,152

Cuadro 1.1: Comparación de los valores de la solución del problema (1.30) y los obtenidos por el método de Euler para $h = 0{,}25$ y $0{,}125$

absolutos y relativos, se observa que efectivamente el error disminuye con el tamaño del paso. Pero también podemos apreciar cómo varía el error según aumenta el número de pasos. Así por ejemplo, vemos que para obtener el primer decimal correcto se necesitan 80 pasos aproximadamente, para el segundo 170 pasos y más de 1000 para el tercero. Estos datos parecen sugerir que existe una dependencia lineal entre los tamaños del error y del paso. Dicha conjetura parece confirmarse con los datos de la última columna donde se puede observar que el error es aproximadamente proporcional al tamaño del paso. Se puede demostrar que efectivamente la conjetura es correcta y no sólo en este caso sino que es cierta para cualquier aproximación hecha con el método de Euler, supuesto que f tiene ciertas propiedades de regularidad. En concreto se demuestra que, dado el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \tag{1.33}$$

con solución única en el intervalo $[a,b]$, existe una constante $C > 0$, dependiente de a, b y f pero no del paso $h = \frac{b-a}{N}$ tal que, para todo $n = 1,\ldots N$, si y_n es la aproximación que da el método de Euler en el punto $x_n = a + nh$, se verifica que

$$|y(x_n) - y_n| \leqslant C\,h, \tag{1.34}$$

siendo y la solución de (1.33).

Un método que verifica una relación como la anterior se dice que es un

Número de pasos	h	Euler	Error	Error relativo (%)	Cociente Error/h
10	0,1000	2,5937	0,1245	4,5815	1,2454
20	0,0500	2,6533	0,0650	2,3906	1,2997
30	0,0333	2,6743	0,0440	1,6173	1,3189
40	0,0250	2,6851	0,0332	1,2220	1,3287
50	0,0200	2,6916	0,0267	0,9820	1,3347
60	0,0167	2,6960	0,0223	0,8208	1,3387
70	0,0143	2,6991	0,0192	0,7051	1,3416
80	0,0125	2,7015	0,0168	0,6179	1,3438
90	0,0111	2,7033	0,0149	0,5500	1,3454
100	0,0100	2,7048	0,0135	0,4955	1,3468
110	0,0091	2,7060	0,0123	0,4508	1,3479
120	0,0083	2,7070	0,0112	0,4135	1,3488
130	0,0077	2,7079	0,0104	0,3819	1,3496
140	0,0071	2,7086	0,0096	0,3548	1,3503
150	0,0067	2,7093	0,0090	0,3313	1,3509
160	0,0063	2,7098	0,0084	0,3107	1,3514
170	0,0059	2,7103	0,0080	0,2925	1,3519
180	0,0056	2,7108	0,0075	0,2764	1,3523
190	0,0053	2,7112	0,0071	0,2619	1,3526
200	0,0050	2,7115	0,0068	0,2489	1,3529
300	0,0033	2,7138	0,0045	0,1662	1,3550
400	0,0025	2,7149	0,0034	0,1247	1,3560
500	0,0020	2,7156	0,0027	0,0998	1,3567
600	0,0017	2,7160	0,0023	0,0832	1,3571
700	0,0014	2,7163	0,0019	0,0713	1,3574
800	0,0013	2,7166	0,0017	0,0624	1,3576
900	0,0011	2,7168	0,0015	0,0555	1,3578
1000	0,0010	2,7169	0,0014	0,0500	1,3579

Cuadro 1.2: Aproximaciones de la solución del problema (1.30) en el punto $x = 1$ para distintos tamaños de paso h. El valor exacto es $e = 2,7182...$.

método de primer orden.[9] En el capítulo 7 analizaremos con más detalle este y otros métodos de aproximación numérica de soluciones de ecuaciones diferenciales.

[9] Si h aparece elevado a una potencia r en (1.34), se dice que el método es de **orden** r.

1.5. Ejercicios

1.5.1. Comprueba que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales indicadas:

a) $y = 3x + x^2$ de la ecuación diferencial $xy' - y = x^2$.

b) $y = 2 + \sqrt{x^2 + 1}$ de la ecuación diferencial $-(x^2 + 1)y' + xy = 2x$.

c) $y = x\sqrt{1 - x^2}$ de la ecuación diferencial $yy' = x - 2x^3$.

d) $y = e^{\operatorname{arc\,sen} x}$ de la ecuación diferencial $xy' = y \operatorname{tg}(\log y)$.

e) $\begin{cases} x = & t \log t \\ y = & t^2(2\log t + 1) \end{cases}$ de la ecuación diferencial $y' \log \dfrac{y'}{4} = 4x$.

f) $\begin{cases} x = & \log t + \operatorname{sen} t \\ y = & t(1 + \operatorname{sen} t) + \cos t \end{cases}$ de la ecuación diferencial $x = \log y' + \operatorname{sen} y'$.

1.5.2. Verifica que las siguientes familias uniparamétricas de funciones son familias de soluciones de las ecuaciones diferenciales indicadas:

a) $y = \log(e^x + c)$ de la ecuación diferencial $y' = e^{x-y}$.

b) $y = \sqrt{x^2 - cx}$ de la ecuación diferencial $(x^2 + y^2) - 2xyy' = 0$.

c) $(x + c)^2 + y^2 = 4$ de la ecuación diferencial $y^2\big((y')^2 + 1\big) = 4$.

Obtén dos soluciones singulares de la ecuación del apartado c).

1.5.3. Comprueba si las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales indicadas:

a) $e^{-y} - cx = 1$ de la ecuación diferencial $xy' + 1 = e^y$.

b) $y^2 + 2cx = c^2$ de la ecuación diferencial $y\big(y'\big)^2 + 2xy' = y$.

c) $x = y\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t^2 dt$ de la ecuación diferencial $y = xy' + y^2 \operatorname{sen} x^2$.

1.5.4. Verifica que $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ es solución del problema de valor inicial:

$$y'' - 4y = 12x, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 1.$$

1.5.5. Comprueba que las funciones $y(x)$ son soluciones de las ecuaciones diferenciales indicadas y determina el valor de la constante c de forma que la solución satisfaga la condición inicial dada:

a) $y' + y = 0$; $y(x) = ce^{-x}$, $y(0) = 2$.

b) $y' = x - y$; $y(x) = ce^{-x} + x - 1$, $y(0) = 3$.

c) $y' = 3x^2(y^2 + 1)$; $y(x) = \operatorname{tg}\big(x^3 + c\big)$, $y(0) = 1$.

d) $xy' - 3y = x^3$; $y(x) = x^3(c + \ln x)$, $y(1) = 17$.

1.5.6. ¿Para qué valores de la constante k es la función $y = e^{kx}$ solución de la ecuación diferencial

$$2y''' + y'' - 5y' + 2y = 0?$$

1.5.7. ¿Para qué valores de la constante k es la función $y = e^{kx}$ solución de la ecuación diferencial

$$y^{(4)} - 3y'' + 2y' = 0?$$

1.5.8. Halla todos los valores de la constante r para los que la función $y = x^r$ es solución de la ecuación:

a) $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$
b) $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$
c) $x^4y^{(4)} + 7x^3y''' + 3x^2y'' - 6xy' + 6y = 0$

1.5.9. Indica cuáles de los siguientes problemas de valor inicial satisfacen las hipótesis del teorema de Picard y, por lo tanto, tienen solución única:

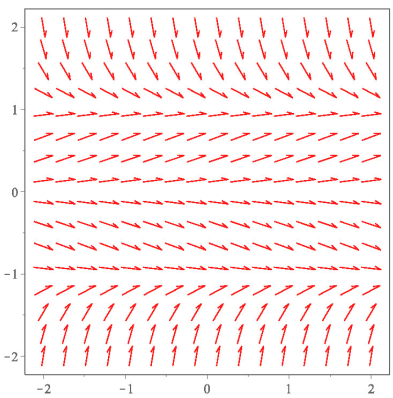
a) $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$
b) $(y')^2 = y, \quad y(1) = 0$
c) $y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 1$
d) $y' = \dfrac{x-y}{x+y}, \quad y(0) = -1$

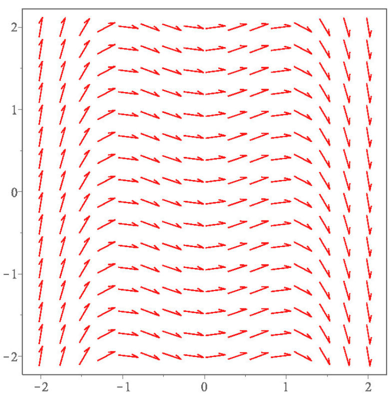
1.5.10. Estudia las isoclinas de las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $y' = x + 1$
b) $y' = \dfrac{y-x}{y+x}$
c) $y' = x + y$
d) $y' = y - x$

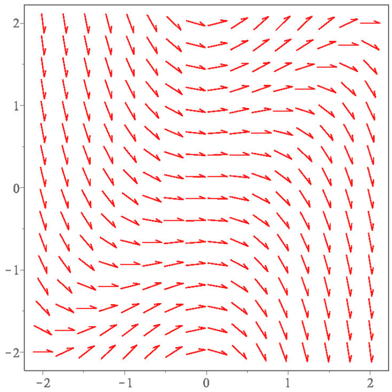
1.5.11. En las siguientes figuras aparece representado el campo de direcciones de la ecuación que se indica. Esboza algunas soluciones de la ecuación diferencial.

a) $y' = y(1 - y^2)$
b) $y' = x(1 - x^2)$

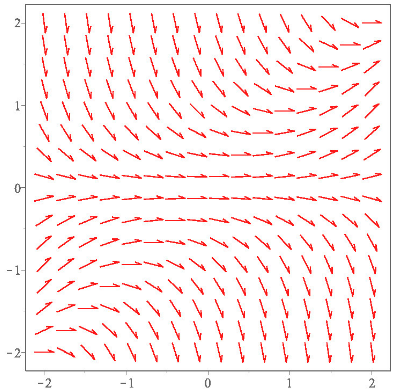




c) $y' = x(y - x)$



d) $y' = y(x - y)$



CAPÍTULO 2

Métodos elementales de resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden

En este capítulo nos vamos a centrar en el estudio de algunos métodos elementales de resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Recordamos del capítulo precedente que una ecuación diferencial de primer orden expresada en forma normal es una ecuación de la forma

$$y' = f(x, y) \tag{2.1}$$

para alguna función f. También se suele escribir, cambiando la notación para la derivada,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2.2}$$

La ecuación (2.2) se puede poner en la forma

$$M(x, y) + N(x, y)\,\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.3}$$

Esta última forma de la ecuación de primer orden es frecuente encontrársela escrita en la forma clásica

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{2.4}$$

Esta notación presenta cierta ambigüedad pero tiene la ventaja de que se puede manipular de manera formal fácilmente y además es totalmente simétrica en las dos variables, por lo que se puede considerar tanto como una ecuación con función incógnita y de variable x como una ecuación con función incógnita x de variable y.[1] Esto nos puede resultar útil cuando no sea fácil resolverla en uno de los casos pero sí en el otro.

[1]En este caso el teorema de la función inversa justifica la validez del procedimiento.

2.1. Ecuaciones de la forma $y' = f(x)$

El ejemplo más sencillo de ecuación diferencial de primer orden es la ecuación
$$y' = f(x) \tag{2.5}$$
donde f es una función continua.

Resolver esta ecuación consiste simplemente en hallar una primitiva de la función f. El teorema fundamental del cálculo nos asegura la existencia de dicha primitiva y, por lo tanto, que (2.5) tiene solución. Además de las propiedades de las derivadas se deduce que dos soluciones de (2.5) difieren en una constante y que, recíprocamente, cualquier función que difiera en una constante de una solución también es una solución. Podemos resumir lo anterior diciendo que la solución general de la ecuación (2.5) es la familia uniparamétrica de funciones

$$y(x) = \int f(x)dx + c \tag{2.6}$$

donde c es una constante real arbitraria y $\int f(x)dx$ es una primitiva cualquiera de la función f. En este caso las soluciones están definidas en los intervalos en los que f está definida.

Ejemplo 2.1.1. Consideremos la ecuación diferencial

$$y' = 4x^3.$$

Integrando se obtiene que la solución general de la ecuación es la familia de funciones
$$y(x) = x^4 + c \tag{2.7}$$
donde c es una constante real arbitraria.

Para obtener la solución que en un punto dado x_0 toma el valor y_0, basta con substituir estos valores en (2.7)

$$y_0 = y(x_0) = x_0^4 + c$$

y despejar c en esta última ecuación para obtener la solución buscada

$$y(x) = x^4 - x_0^4 + y_0.$$

No siempre es tan sencillo calcular la primitiva de la función f como lo ha sido en el ejemplo precedente e incluso en ocasiones ni tan siquiera es posible expresar dicha primitiva en términos de funciones elementales. En estas ocasiones nos tendremos que conformar con expresar la solución mediante integrales.

Ejemplo 2.1.2. La ecuación

$$y' = e^{-x^2} \tag{2.8}$$

tiene como solución general la familia de todas las primitivas de la función e^{-x^2}, que no se pueden expresar en términos de funciones elementales. Sin embargo, sabemos por el teorema fundamental del cálculo que, por ejemplo, la función

$$x \longmapsto \int_0^x e^{-s^2} ds,$$

es una primitiva de la función e^{-x^2}. Haciendo uso de este hecho podemos expresar la solución general de la ecuación (2.8) mediante una integral:

$$y(x) = \int_0^x e^{-s^2} ds + c \tag{2.9}$$

donde c es una constante real.

Aunque en este caso la solución no venga expresada mediante una función elemental, la fórmula (2.9) define una función bien conocida[2] y que, en último caso, se puede evaluar de manera aproximada mediante los métodos habituales de integración numérica como la regla de Simpson, la del trapecio etc.

Si como en el ejemplo precedente queremos obtener la solución que en un punto x_0 vale y_0, sustituyendo estos valores en (2.9) se obtiene que

$$c = y_0 - \int_0^{x_0} e^{-s^2} ds$$

por lo que la solución buscada es

$$y(x) = \int_0^x e^{-s^2} ds + y_0 - \int_0^{x_0} e^{-s^2} ds = \int_{x_0}^x e^{-s^2} ds + y_0.$$

El procedimiento seguido en este ejemplo se puede extender para obtener la solución de cualquier problema de valor inicial de la forma

$$\begin{cases} y' = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.10}$$

En este caso la solución es la función

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(s) ds + y_0.$$

[2] La **función error**

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds$$

es una función especial perfectamente tabulada que en la actualidad se encuentra presente en la mayoría de los programas de cálculo de ordenador.

Además, como dos funciones definidas en un intervalo con la misma derivada se diferencian en una constante, se deduce de manera inmediata que la solución del problema (2.10) es única.

Sucesivas repeticiones del procedimiento que acabamos de describir sirven para resolver ecuaciones de la forma

$$y^{(n)} = f(x). \tag{2.11}$$

Ejemplo 2.1.3. Consideremos la ecuación diferencial

$$y'' = 2x + \cos x. \tag{2.12}$$

Integrando resulta que

$$y' = x^2 + \operatorname{sen} x + c \tag{2.13}$$

y volviendo a integrar se obtiene la solución general de (2.12):

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 - \cos x + cx + c' \tag{2.14}$$

donde c y c' son constantes reales arbitrarias.

2.1.1. Segunda ley de Newton. Ecuación del movimiento de un cuerpo en caída libre

La **segunda ley de Newton** establece que la variación Δp del momento p de un objeto material es igual a la fuerza F aplicada al objeto multiplicada por el tiempo Δt que la fuerza actúa sobre él:

$$\Delta p = F\Delta t.$$

Pasando Δt al primer miembro y haciéndolo tender a 0 se obtiene la formula

$$\frac{dp}{dt} = F.$$

El momento del objeto en un instante t es el producto de la masa m del objeto por su velocidad, en dicho instante, de manera que si la masa m se mantiene constante,

$$\frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} = F. \tag{2.15}$$

Teniendo en cuenta que la derivada que aparece en el término intermedio de la anterior ecuación es la aceleración a, podemos expresar la ecuación (2.15) mediante la conocida fórmula

$$F = ma. \tag{2.16}$$

De acuerdo con esta última ecuación podemos enunciar la segunda ley de Newton diciendo que *la aceleración a de un cuerpo de masa m es directamente proporcional a la fuerza total F que actúa sobre él, con constante de proporcionalidad $1/m$.*

Supongamos que el objeto se mueve a lo largo de una trayectoria rectilínea y denotemos por $x(t)$ la posición en la que se encuentra el objeto en el instante t.[3] La velocidad v, que es la tasa de variación de la posición del objeto en cada instante, vendrá dada por la derivada de la función x y, por tanto, su aceleración a, que es la tasa de variación de la velocidad, será la segunda derivada. Normalmente la fuerza que actúa sobre el objeto, que puede ser la suma de diversas fuerzas diferentes, depende en cada instante de la velocidad y de su posición. De manera, que si queremos determinar cuál es la posición del objeto cuando sobre él actúa una fuerza F conocida, aplicando la ley de Newton esta cuestión se transforma en el problema de encontrar la solución de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$mx'' = F(t, x, x'). \tag{2.17}$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de **ecuación del movimiento**.

No existe un método general para resolver la ecuación (2.17). Sin embargo a lo largo de estas notas veremos algunos casos particulares en los que sí es posible dar métodos para resolver la ecuación. Uno de estos casos se tiene cuando la función F no depende ni de la posición ni de la velocidad del objeto. En este caso la solución se obtiene, como hemos visto antes, simplemente hallando una primitiva de la función F.

Veamos cómo se aplica lo anterior al estudio del movimiento de cuerpos en caída libre. Supongamos que un cuerpo de masa m cae únicamente bajo la acción de la gravedad y que la acción de resistencia del medio en que se halla, por ejemplo el aire, es despreciable. En este caso la única fuerza que actúa sobre el objeto es

$$F = mg \tag{2.18}$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Si además suponemos que el objeto se halla en las proximidades de la superficie terrestre podemos suponer que la gravedad es constante. Si $x(t)$ es la distancia recorrida por el objeto en dirección a la superficie terrestre desde una posición fija en la vertical de su trayectoria, sustituyendo (2.18) en la ecuación del movimiento obtenemos la ecuación

$$x'' = g.$$

Integrando un par de veces esta ecuación se obtiene que

$$v(t) = x'(t) = gt + c \tag{2.19}$$

[3] Como es habitual en la mecánica clásica, al hablar de velocidad, posición etc de un cuerpo que se mueve nos estamos refiriendo en realidad a la velocidad, posición etc. de su centro de masa.

y

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + ct + c', \tag{2.20}$$

donde c y c' son constantes reales. Si suponemos que en el instante inicial $t = 0$ el objeto se hallaba a una distancia x_0 del punto prefijado y tenía una velocidad v_0, se tiene, de (2.19) y (2.20), que $v_0 = c$ y $x_0 = c'$, luego

$$v(t) = gt + v_0 \tag{2.21}$$

y

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0. \tag{2.22}$$

En el caso particular de que en el momento inicial el objeto se halle en reposo, esto es $v_0 = 0$, y que el punto fijo coincida con la posición del objeto en el instante $t = 0$, es decir $x_0 = 0$, las ecuaciones (2.22) y (2.21) quedan

$$v(t) = gt, \qquad x(t) = \frac{1}{2}gt^2. \tag{2.23}$$

Juntando ambas expresiones se obtiene la conocida fórmula de la velocidad de un cuerpo en caída libre

$$v = \sqrt{2gx}. \tag{2.24}$$

Ejemplo 2.1.4. Una persona deja caer una piedra desde lo alto de un edificio, espera dos segundos y lanza una pelota de tenis con una velocidad inicial de 25 m/s. Si ambos objetos tocan el suelo en el mismo instante, ¿cuál será la altura del edificio?

Para contestar a esta pregunta supongamos que h es la altura del edificio y que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ ($v_1(t)$ y $v_2(t)$) indican las distancias en metros a lo alto del edificio (velocidades) de la piedra y la pelota, respectivamente, en el instante t medido en segundos. Aplicando la ecuación (2.23) a la piedra, teniendo en cuenta que en ese caso $x_1(0) = 0$ y $v_1(0) = 0$, se tiene que

$$h = \frac{1}{2}gt_s^2 \tag{2.25}$$

donde t_s es el tiempo que tarda la piedra en llegar al suelo. En el caso de la pelota como esta tarda en llegar al suelo $t_s - 2$ segundos y las condiciones iniciales son $x_2(0) = 0$ y $v_2(0) = 25$, se deduce, aplicando (2.22), que

$$h = \frac{1}{2}g(t_s - 2)^2 + 25(t_s - 2). \tag{2.26}$$

Juntando (2.25) y (2.26) y operando se obtiene que

$$t_s = \frac{50 - 2g}{25 - g} \tag{2.27}$$

de donde se deduce, tomando como valor de la gravedad $g = 9{,}8\,m/s^2$ y aplicando (2.25), que la altura del edificio es

$$h = \frac{1}{2}g\left(\frac{50-2g}{25-g}\right)^2 \approx 155{,}29\,m.$$

Si en lugar de esperar dos segundos para lanzar la pelota hubiera esperado a segundos y, como antes, suponemos que ambos objetos tocan el suelo a la vez, un argumento similar al que acabamos de realizar nos lleva a la igualdad

$$(25-ag)t_s = a\left(25-\frac{a}{2}g\right).$$

Analizando esta ecuación se observan dos cosas inmediatamente. La primera es que $25-ag \neq 0$ pues en caso contrario la ecuación no tiene solución, lo que quiere decir que, en ese caso, la piedra y la pelota no llegan al suelo a la vez sea cual sea la altura del edificio. La segunda es que $25-ag$ y $25-\frac{a}{2}g$ han de tener el mismo signo pues en caso contrario $t_s < 0$.

Por otra parte, si $25-\frac{a}{2}g \leqslant 0$, entonces

$$0 \leqslant \frac{a}{2}g - 25 < ag - 25$$

luego

$$\frac{a}{t_s} = \frac{25-ag}{25-\frac{a}{2}g} > 1$$

que no puede ser porque obviamente si queremos que ambos objetos alcancen el suelo simultáneamente se ha de lanzar la pelota antes de que la piedra toque el suelo, es decir ha de ser $a < t_s$. En consecuencia $25-ag > 0$, lo que nos dice que si queremos que la pelota y la piedra toquen el suelo a la vez hemos de esperar para lanzar la pelota menos de $25/g \approx 2{,}55$ segundos desde que se dejó caer la piedra. Como puede observarse este tiempo límite es independiente de la altura del edificio.

2.2. Ecuaciones de variables separables

Una ecuación diferencial de primer orden se dice que es de **variables separables** si es de la forma

$$y'(x) = g(x)h(y) \tag{2.28}$$

donde g y h son funciones continuas.

Si la función h no se anula, dividiendo ambos miembros de la ecuación (2.28) por h, queda que

$$\frac{1}{h(y)}y' = g(x).$$

Integrando ambos miembros de la ecuación precedente se llega a que las soluciones $y(x)$ de la ecuación (2.28) han de verificar que

$$\int \frac{1}{h\,(y(x))} y'(x)dx = \int g(x)\,dx + c \tag{2.29}$$

donde c es una constante real arbitraria. Por este método tenemos definida de forma implícita, en principio, la familia de soluciones de la ecuación (2.28).

Obsérvese que haciendo el cambio de variable $y = y(x)$ en la primitiva del lado izquierdo de (2.29), dicha ecuación se puede escribir en la forma[4]

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x)dx. \tag{2.30}$$

Ejemplo 2.2.1. La ecuación

$$y' = 2x(1 + y^2) \tag{2.31}$$

es una ecuación en variables separables. Dividiendo por $1 + y^2$ e integrando se tiene que las soluciones de (2.31) verifican la igualdad

$$\int \frac{y'(x)}{1 + (y(x))^2} dx = \int 2x\,dx + c$$

donde c es una constante real arbitraria. Calculando las primitivas que aparecen en la relación anterior queda

$$\operatorname{arctg} y(x) = x^2 + c,$$

lo que nos conduce a que

$$y(x) = \operatorname{tg}(x^2 + c).$$

Ejemplo 2.2.2. Consideremos la ecuación

$$y' = y^2 \operatorname{sen} x. \tag{2.32}$$

Dividiendo ambos miembros por y^2 queda

$$\frac{y'}{y^2} = \operatorname{sen} x \tag{2.33}$$

e integrando queda

$$-\frac{1}{y} = -\cos x + c$$

[4]Es sencillo recordar esta fórmula porque si escribimos la ecuación (2.28) en la forma clásica

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x)dx.$$

e integramos formalmente ambos términos, se obtiene (2.30).

luego

$$y(x) = \frac{1}{\cos x - c}, \tag{2.34}$$

para c una constante real arbitraria. Obsérvese que en el razonamiento anterior hemos supuesto implícitamente que $y \neq 0$ porque hemos dividido por y^2 para llegar a (2.33). Por otra parte es obvio que la función constantemente nula es solución de (2.32) aunque no sea de la forma (2.34) para ninguna constante real c.

Como hemos visto en el ejemplo anterior, el procedimiento descrito al principio de esta sección para hallar las soluciones de la ecuación (2.28) sigue siendo válido aunque la función h se anule. Sin embargo, en este caso, las soluciones obtenidas por este método no son todas las soluciones de la ecuación, porque si $h(a) = 0$ es obvio que la función $y \equiv a$ también es solución de la ecuación.

Ejemplo 2.2.3. Consideremos la ecuación lineal

$$y' + a(x)y = 0. \tag{2.35}$$

donde suponemos que a es una función continua. Por (2.30)

$$\int \frac{dy}{y} = -\int a(x)\,dx + c$$

luego

$$\ln|y| = -\int a(x)\,dx + c$$

o

$$|y(x)| = e^c \exp\left(-\int a(x)\,dx\right).$$

Además $y \equiv 0$ también es solución de la ecuación. En consecuencia la solución general de la ecuación de la ecuación (2.35) es

$$y(x) = C \exp\left(-\int a(x)\,dx\right)$$

para cualquier C real.

Ejemplo 2.2.4. Consideremos la ecuación en variable separables

$$y' = \frac{3 - 4\,x}{5\,y^4 - 2}. \tag{2.36}$$

Integrando se tiene que

$$\int (5y^4 - 2)\,dy = \int (3 - 4x)\,dx. \tag{2.37}$$

De aquí se deduce que la solución general de la ecuación viene dada en forma implícita por la relación

$$y^5 - 2y + 2x^2 - 3x + c = 0 \tag{2.38}$$

donde c es una constante real. En este caso no es posible expresar de forma explícita, o al menos hacerlo de forma sencilla, las soluciones.

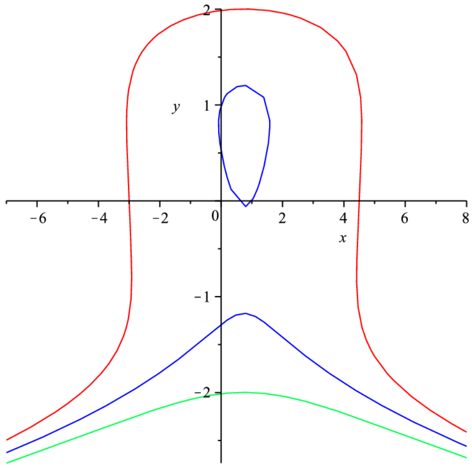


Figura 2.1: Algunas soluciones de la ecuación (2.36).

Si queremos resolver el problema de valor inicial para la ecuación (2.36) cuando $y(1) = 0$, reemplazando x por 1 e y por 0 en la ecuación (2.38) se llega a que $c = 1$ y, por lo tanto,

$$y^5 - 2y + 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

es la solución de la familia (2.38) que pasa por $(1, 0)$. Sin embargo esta curva,

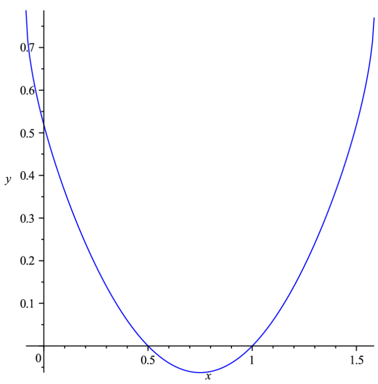


Figura 2.2: Solución de la ecuación (2.36) que satisface $y(1) = 0$.

como puede observarse en la figura 2.1, donde aparece representada en azul, no es la gráfica de ninguna función. De hecho, existen tres funciones definidas en el intervalo $(-0{,}08, 1{,}58)$ cuyas gráficas son disjuntas y están contenidas en la curva (2.38). De ellas la que satisface la condición inicial $y(1) = 0$ aparece representada en la figura 2.2.

2.2.1. Dinámica de poblaciones

En esta sección vamos a estudiar cómo se puede modelizar el crecimiento de diversas poblaciones mediante ecuaciones diferenciales. En general la variedad de factores que intervienen en las variaciones en el crecimiento de una población requieren modelos complejos que van más allá del alcance de estas notas. Aquí tendremos que conformarnos con estudiar algunos tipos *ideales* de poblaciones cuya dinámica dependa de pocos factores que además sean fácilmente evaluables. Precisamente por la simplicidad de estos modelos su capacidad de predicción en casos reales es muy limitada. No obstante, los modelos simples, como el de Malthus o el logístico, son útiles porque, además de ser el punto de partida natural para estudiar la dinámica de poblaciones, nos pueden servir de base para el estudio de modelos más complejos y facilitarnos su comprensión.

Consideremos una población de individuos de una misma especie en una región determinada. Dicha población puede estar constituida por todos los seres humanos del planeta o de un país, las bacterias de un cultivo, los animales de una colonia o los insectos que periódicamente asolan un cultivo, por ejemplo. Vamos a estudiar la variación del número de individuos de dicha población en función del tiempo. En cada caso, la unidad de tiempo variará según el modelo de población considerado, así, por ejemplo, en el caso de la población de un país se suele considerar como unidad el año pero en otros casos pueden ser horas o días las unidades de tiempo.

Se define la **tasa de crecimiento** de la población en un intervalo de tiempo $[t, t+h]$ como el cociente entre la variación de la población en ese periodo y la población al principio del mismo. Así, si denotamos por $P(t)$ al número de individuos de la población estudiada en el instante t, la tasa de crecimiento en el intervalo $[t, t+h]$ será el cociente:

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{P(t)}.$$

Dicha tasa de crecimiento vendrá determinada por diversos factores, entre ellos el número de nacimientos y de defunciones en el periodo considerado. La **tasa de natalidad** o **tasa de reproducción** en dicho periodo se define como el cociente entre el número de nacimientos habidos en ese periodo y la población total al comienzo del periodo:

$$\frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de nacimientos en el intervalo } [t, t+h]}{P(t)}.$$

De forma análoga se define la **tasa de mortalidad** en el intervalo $[t, t+h]$..

Si suponemos que la población está aislada, es decir que no hay ni emigraciones ni inmigraciones, de manera que la población únicamente varía por el efecto de los nacimientos y las defunciones, la tasa de crecimiento en un cierto intervalo $[t, t+h]$ será la diferencia entre las tasas de natalidad y mortalidad en dicho intervalo:

$$\begin{aligned} &\frac{P(t+h)-P(t)}{P(t)} = \\ &= \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de nacimientos} - \text{n}^{\text{o}} \text{ de defunciones en el intervalo } [t, t+h]}{P(t)} \end{aligned} \tag{2.39}$$

La **tasa de natalidad** por unidad de tiempo, o simplemente tasa de natalidad, es la función

$$\nu(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de nacimientos en el intervalo } [t, t+h]}{hP(t)}$$

y la **tasa de mortalidad** por unidad de tiempo, o simplemente tasa de mortalidad, es

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de defunciones en el intervalo } [t, t+h]}{hP(t)}.$$

Dividiendo por h en ambos miembros de la relación (2.39) y haciendo tender h a 0, se llega a la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = (\nu - \delta)P. \tag{2.40}$$

El cociente $P'(t)/P(t)$ se dice que es la tasa de crecimiento de la población P en el instante t.

Modelo de crecimiento de Malthus

Comenzaremos estudiando el modelo más simple de crecimiento. Supondremos que la población que estamos estudiando cumple las dos condiciones siguientes:

- La población está aislada.
- Las tasas de natalidad y mortalidad son constantes.

La segunda condición implica que la tasa de crecimiento es constante. Si llamamos k a dicha constante se tiene entonces que la ecuación diferencial (2.40) queda

$$\frac{dP}{dt} = kP. \tag{2.41}$$

La ecuación (2.41) es una ecuación de variables separables cuya solución general podemos obtener por el procedimiento explicado al principio de esta sección. Calculando las primitivas que aparecen en (2.30) para nuestro caso se obtiene que

$$\ln P(t) = kt + c \tag{2.42}$$

luego

$$P(t) = Ce^{kt} \tag{2.43}$$

donde $C = e^c$ es una constante real positiva. La función $P \equiv 0$ también es una solución de (2.41) pero, como suponemos que partimos de poblaciones con algún individuo, podemos descartarla.

Si en el instante t_0 la población consta de P_0 individuos, sustituyendo en (2.43) se obtiene que

$$C = P_0 e^{-kt_0}$$

luego la solución del correspondiente problema de valor inicial es

$$P(t) = P_0 e^{k(t-t_0)}. \tag{2.44}$$

Este modelo, pese a su simplicidad, puede resultar adecuado para situaciones en que el entorno no ejerce influencia en la población, el tiempo de observación es lo suficientemente pequeño como para que resulte razonable la hipótesis de que la tasa de crecimiento media permanece casi constante, los recursos son casi infinitos y la población inicial es pequeña. Por ejemplo, este es un modelo razonable para estimar la tasa de crecimiento de un parásito cuando penetra en el flujo sanguíneo de un individuo por primera vez (como el parásito de la malaria), en el estudio de la tasa de crecimiento del número de nuevos casos de infección al comienzo de una epidemia o en la estimación de la tasa de crecimiento de una plaga que haya invadido un campo.

Ejemplo 2.2.5. Supongamos que inoculamos un cultivo bacteriano en una placa de Petri con una densidad de 10/ml y que al cabo de 20 horas la densidad se ha doblado. Si se sabe que la población de bacterias en el cultivo crece de forma proporcional al numero de bacterias presentes ¿cuál es la tasa de crecimiento de dicho cultivo? ¿Cuánto tardará en multiplicarse por 8 la densidad inicial del cultivo?

Si el volumen de la placa es V ml, de acuerdo con la ecuación (2.44) la tasa de crecimiento vendrá dada por la ecuación

$$20V = 10Ve^{20k}$$

luego

$$k = \frac{\ln 2}{20} \approx 0,03466.$$

El cultivo se habrá multiplicado por 8 en el tiempo t para el que se cumpla que

$$80V = 10Ve^{kt},$$

luego el cultivo tardará en multiplicarse por 8

$$t = \frac{\ln 8}{k} = \frac{3 \ln 2 \times 20}{\ln 2} = 60 \text{ horas}.$$

Este modelo de crecimiento se denomina **modelo de crecimiento maltusiano o de Malthus** por el famoso economista británico Thomas Robert Malthus quien en su obra *"Ensayo sobre el principio de la población"* propuso el modelo de crecimiento geométrico para la población humana.[5]

Modelo de crecimiento logístico

Si suponemos, como en el modelo anterior, que la población está aislada pero las tasas de natalidad y mortalidad no son constantes, la población P satisfará la ecuación (2.40) con las funciones ν y δ que aparecen en ella dependientes del tiempo. Estas funciones no tienen por qué estar determinadas a priori sino que pueden depender de la función P. Por ejemplo, en poblaciones que tienen limitaciones de espacio o escasez de recursos naturales o de alimentos, es de esperar que una vez alcanzado un cierto nivel de población estas circunstancias provoquen o descensos de la natalidad o aumento de la mortalidad o ambas cosas a la vez haciendo que la tasa de crecimiento no se mantenga constante sino que dependa del número de individuos de la población. En esta situación una hipótesis razonable es suponer que existe un tamaño máximo de población M por encima del cual el sistema a largo plazo se hace inestable, de manera que superado ese máximo la tasa media de población es negativa y sólo es positiva si la población se mantiene por debajo de M, siendo cada vez menor según la población se aproxima al máximo. El modelo más sencillo que recoge lo anterior se tiene suponiendo que la tasa media de crecimiento de la población es proporcional a la diferencia $M - P$. En este caso la ecuación (2.40) quedaría

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P), \tag{2.45}$$

donde k y M son constantes positivas. La constante M se suele denominar **capacidad de soporte del medio**. Haciendo $b = k$ y $a = kM$ la ecuación

[5] In the United States of America, where the means of subsistence have been more ample, the manners of the people more pure, and consequently the checks to early marriages fewer, than in any of the modern states of Europe, the population has been found to double itself in twenty-five years.

This ratio of increase, though short of the utmost power of population, yet as the result of actual experience, we will take as our rule; and say,

> That population, when unchecked, goes on doubling itself every twenty-five years or increases in a geometrical ratio.

(Thomas Robert Malthus, An Essay on the Principle of Population. 1798.)

precedente se puede escribir en la forma

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2. \tag{2.46}$$

Esta ecuación se denomina **ecuación logística**. Este modelo de crecimiento fue propuesto en 1838 por el matemático belga P. F. Verhulst.[6]

La expresión (2.46) de la ecuación logística nos permite dar una nueva interpretación de este modelo de crecimiento. El término bP^2 se puede interpretar como un factor corrector del modelo de crecimiento maltusiano que recoge el hecho de que los individuos de la población están compitiendo por unos recursos limitados. En este caso dicho factor corrector se supone que es proporcional al numero de encuentros posibles por unidad de tiempo entre los individuos de la población. En general la constante M será grande en comparación con b por lo que si la población es pequeña el termino corrector sera despreciable comparado con aP y la población se comportará siguiendo el modelo de crecimiento exponencial. Sin embargo, cuando la población crezca y se aproxime al valor M el factor bP^2 ya no será despreciable por lo que la tasa de crecimiento disminuirá su crecimiento exponencial.

El teorema de Picard nos garantiza la existencia de una única solución de la ecuación logística para cualquier valor inicial de la población.

La ecuación (2.45) es una ecuación de variables separables. Integrando se obtiene que, si $P(M-P)$ no se anula,

$$\int \frac{dP}{P(M-P)} = kt$$

que, descomponiendo en fracciones simples el integrando del primer término, queda

$$\frac{1}{M}\left[\int \frac{dP}{P} + \frac{dP}{M-P}\right] = kt$$

luego

$$\ln\left|\frac{P}{M-P}\right| = kMt + C. \tag{2.47}$$

Si suponemos que la población inicial es $P(0) = P_0$, sustituyendo en (2.47) se tiene que

$$C = \ln\left|\frac{P_0}{M-P_0}\right|.$$

Sustituyendo C en (2.47) y tomando la exponencial en ambos miembros de la ecuación resultante queda que

$$\left|\frac{P(t)}{M-P(t)}\right| = e^{kMt}\left|\frac{P_0}{M-P_0}\right|.$$

[6] Notice sur la loi que la population suit dans son accroisement, en *Correspondance Mathématique et Physique*, Tomo IV, Bruxelles 1838, pp. 113-121.

Como estamos suponiendo que P es continua y que $M-P$ no se anula entonces $M-P$ y $M-P_0$ tienen el mismo signo y podemos quitar los valores absolutos en la ecuación previa. Operando se llega a que

$$P(t) = \frac{Me^{kMt}\frac{P_0}{M-P_0}}{1+e^{kMt}\frac{P_0}{M-P_0}} = \frac{MP_0}{P_0+(M-P_0)e^{-kMt}}. \tag{2.48}$$

Por otra parte es evidente que $P \equiv 0$ y $P \equiv M$ también son soluciones de la ecuación (2.45).

Se deduce de (2.48) que para cualquier valor no nulo de la población inicial

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \frac{MP_0}{P_0} = M, \tag{2.49}$$

lo que nos dice que, según este modelo de crecimiento, la población tiende a estabilizarse a largo plazo en el valor M independientemente del tamaño inicial.

Ejemplo 2.2.6. Supongamos que en una ciudad de un millón de habitantes en un momento determinado 100.000 personas han oído cierto rumor. Después de una semana la cantidad de personas que han oído ese rumor se ha duplicado. Suponiendo que la evolución del número de personas que ha oído el rumor sigue el modelo logístico de crecimiento, ¿cuándo habrá oído el rumor el 80 % de la población?

Si denotamos por $P(t)$ el número de habitantes de la ciudad, contado en miles de personas, que han oído el rumor en el tiempo t, medido en semanas a partir desde el momento del primer dato, entonces $P(0) = 100$, $P(1) = 200$ y la capacidad de soporte $M = 1000$. Sustituyendo en la ecuación (2.48) se tiene que

$$P(t) = \frac{100000}{100+900e^{-1000kt}} = \frac{1000}{1+9e^{-1000kt}}$$

En particular, para $t = 1$,

$$200 = \frac{1000}{1+9e^{-1000k}}$$

luego

$$9e^{-1000k} = 4$$

y

$$k = \frac{1}{1000}\ln\frac{9}{4} \approx= 0{,}008109.$$

Cuando $P(t) = 0{,}8 \times 10000 = 800$ se tendrá que

$$800 = \frac{1000}{1+9e^{-1000kt}}$$

luego

$$9e^{-1000kt} = \frac{10}{8} - 1 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

y, por tanto,

$$t = \frac{\ln 36}{1000k} = \frac{\ln 36}{\ln \frac{9}{4}} \approx 4{,}42.$$

Esto nos dice que aproximadamente 4 semanas y 3 días después del momento inicial el rumor era conocido por el 80 % de la población.

2.2.2. Interés compuesto

El modelo de crecimiento exponencial también sirve para estudiar la evolución del capital resultante cuando se deposita una cantidad de dinero en un banco a un interés compuesto durante un cierto periodo de tiempo.

Si se deposita una cantidad C de dinero a un tipo de interés de un i por ciento anual del capital depositado, al cabo de un año nuestro capital se habrá incrementado en $Ci/100$ y, por lo tanto, en ese momento nuestro capital será igual a

$$C + C\frac{i}{100} = C\left(1 + \frac{i}{100}\right).$$

Por lo tanto, el factor de crecimiento del capital en un año, si el interés i viene dado mediante un tanto por ciento anual, es $r = i/100$. Aunque el tipo de interés se exprese en un tanto por ciento anual, los intereses pueden pagarse en periodos distintos al año, por ejemplo existen bancos que pagan los intereses cada mes. Además, en los depósito normales no es necesario esperar hasta que corresponda recibir los intereses para cancelarlo. En este caso los intereses se pagan de acuerdo con el número de días que se ha mantenido el depósito. Así por cada día se pagaría un interés de $Cr/365$ y el interés recibido sería el producto de esa cantidad por el número de días que ha estado el dinero depositado. Podemos resumir todas estas situaciones considerando que hemos fijado una escala de tiempo con una unidad determinada, que puede ser un día, una semana, quince días, un mes, un año etc. Si el interés se paga cada h unidades de tiempo a un tipo de interés, por unidad de tiempo, del i por ciento, el interés pagado por un capital C será Crh. Si denotamos por $C(t)$ el capital depositado en el instante t se tendría entonces que

$$\frac{C(t+h) - C(t)}{h} = C(t)r. \tag{2.50}$$

Si hacemos tender el intervalo entre pagos de intereses a 0, llegamos a un modelo de capitalización continua en el que los intereses se pagan de manera instantánea. En este caso se obtiene, tomando límites en (2.50), la ecuación diferencial

$$\frac{dC}{dt} = Cr \tag{2.51}$$

que como hemos visto más arriba tiene como solución general la familia uniparamétrica

$$C(t) = ke^{rt} \tag{2.52}$$

con k una constante real no negativa. Si el capital inicial es $C(0) = C_0$ entonces

$$C(t) = C_0 e^{rt}. \tag{2.53}$$

Ejemplo 2.2.7. Con motivo del nacimiento de su primer hijo una pareja deposita 6000 € en una cuenta en un banco. Si la cuenta da un 4 % de interes compuesto continuo anual y los intereses se acumulan al capital invertido ¿cuál será el capital de la cuenta cuando el niño cumpla doce años?

La ecuación (2.53), particularizada para $t = 12$, $C_0 = 6000$ y $r = 0{,}04$, nos dice que el capital depositado en la cuenta cuando el niño tenga 12 años será

$$C(12) = 6000e^{0{,}04\times 12} \approx 9696.45\,€.$$

2.2.3. Desintegración radiactiva

La materia está básicamente formada por átomos. De forma esquemática se puede decir que los átomos estás constituidos por una parte central, llamada núcleo, que es donde se concentra casi toda su masa, rodeada por una nube de electrones. El núcleo está constituido por protones y neutrones. Todos los núcleos atómicos de un elemento dado tienen un número fijo de protones pudiendo variar el número de neutrones. El número de protones del núcleo se denomina número atómico y, como hemos señalado anteriormente, caracteriza los elementos químicos. Sin embargo, existen átomos de un mismo elemento químico con diferente número de neutrones en el núcleo. Estos átomos se dice que son los isótopos de ese elemento. Todos los isótopos de un mismo elemento poseen las mismas propiedades químicas pero cada isótopo tiene propiedades físicas específicas. Gran parte de los elementos que se encuentran en la naturaleza son mezcla de isótopos. Los isótopos pueden ser estables o inestables. Los estables, que son la mayoría en nuestro planeta, son aquellos isótopos cuya desintegración es tan lenta que se puede considerar que mantienen siempre el mismo número de protones y neutrones en su núcleo. Los inestables son aquellos que con el tiempo se desintegran para convertirse en otros elementos que pueden a su vez ser estables o inestables. Si el isótopo resultante es inestable el proceso continua hasta que finalmente acaba en un isótopo estable. Aunque es imposible predecir cuando se va a desintegrar el núcleo de un átomo radiactivo concreto, sí es posible hacerlo en promedio para un conjunto de átomos de un mismo elemento. Empíricamente se ha podido determinar que los isótopos inestables se desintegran a un ritmo constante. Esto es lo que se conoce como **ley de desintegración radiactiva**:

> La velocidad de desintegración de un material radiactivo es directamente proporcional al número de átomos presentes.

Además la constante de proporcionalidad es característica de cada elemento.

Podemos expresar lo anterior en términos matemáticos mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda Q, \qquad \lambda > 0 \tag{2.54}$$

donde $Q(t)$ es la cantidad de material radiactivo presente en el instante t y λ es una constante de proporcionalidad, que se denomina **constante de desintegración**, que depende del material. El signo negativo en la ecuación se debe a que la cantidad del material va disminuyendo con el tiempo.

Se llama **vida media o periodo de semidesintegración** al tiempo que debe transcurrir para que se desintegren la mitad de los núcleos de una muestra radiactiva. La vida media nos proporciona una medida de la estabilidad de un determinado elemento. Los periodos de semidesintegración de los distintos elementos radiactivos son muy diferentes pero para un elemento determinado siempre es el mismo.

La solución general de la ecuación (2.54) es

$$Q(t) = ce^{-\lambda t} \tag{2.55}$$

con $c \in \mathbb{R}$. Si Q_0 indica la cantidad de materia radiactiva que hay en el instante $t = t_0$ entonces

$$Q_0 = ce^{-\lambda t_0}$$

luego

$$Q(t) = Q_0 e^{-\lambda(t-t_0)}. \tag{2.56}$$

La cantidad de material se habrá reducido a la mitad transcurrido un tiempo τ, es decir $Q(t_0 + \tau) = Q_0/2$, si

$$\lambda\tau = \ln 2$$

luego la vida media de ese elemento es

$$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0{,}693}{\lambda}. \tag{2.57}$$

Ejemplo 2.2.8. El fósforo-32, ^{32}P, es un isótopo del fósforo que se utiliza en estudios bioquímicos para determinar las trayectorias seguidas por los átomos de fósforo en los seres vivos. Su vida media es de $14,3$ días. En consecuencia su constante de desintegración será, expresada en días^{-1},

$$\lambda = \frac{\ln 2}{14,3} \approx 0,048471831\, d^{-1}.$$

Determinación de edades por el método del carbono 14

Los isótopos radiactivos se utilizan, entre otras cosas para la determinación de las edades de rocas o restos de seres vivos. Para esto último el método más utilizado es el que emplea un radioisótopo natural del carbono, el carbono-14. El carbono es uno de los elementos químicos más abundante en la naturaleza que además está presente en todos los seres vivos. Hay dos isótopos estables de carbono, el carbono-12 y el carbono-13, y varios radiactivos. De estos últimos, todos salvo el carbono-14, tienen un vida media muy corta que no supera los 20 minutos. Por contra, la vida media del carbono-14 es de aproximadamente 5730 años. En el carbono de origen natural algo menos del 99 % es carbono-12 y aproximadamente el $1,1\,\%$ es carbono-13. El porcentaje de carbono-14 es aproximadamente de las dos billonésimas partes del total.

El carbono-14 se produce en las capas superiores de la atmósfera como resultado del bombardeo del nitrógeno, y en menor medida del oxígeno y carbono, por los neutrones producidos por los rayos cósmicos existente en dichas capas.

En los organismos vivos la proporción de carbono-14 en los átomos de carbono se mantiene constante porque los átomos de carbono-14 que se van desintegrando son sustituidos por nuevos átomos de carbono-14 que el organismo capta de su entorno mediante la respiración, ingestión, etc. Cuando un organismo muere deja de tomar carbono de su entorno por lo que la cantidad de carbono-14 en dicho organismo decrece a un ritmo constante a causa de la desintegración radiactiva. Esto hace que la relación entre los isótopos de carbono-14 y carbono-12 presentes disminuya según va pasando el tiempo. Como la proporción entre ambos isótopos es constante en todos los organismos vivos, se puede determinar el momento de la muerte de un organismo determinado midiendo la proporción de esos dos isótopos. Este método es considerado uno de los métodos más fiables para determinar la edad de objetos con restos vegetales o animales de hasta 50.000 años de antigüedad.

Tomando 5730 años como la vida media del carbono-14 se obtiene que su constante de desintegración es

$$\lambda = \frac{\ln 2}{5730} \approx 1{,}21 \times 10^{-4}.$$

Analizando la relación entre el número de isótopos de carbono-12 y carbono-14 presentes en una muestra del material que queremos fechar, es posible calcular el porcentaje de carbono-14 que aún queda. Si ese porcentaje en el momento t_1, es una fracción p de la cantidad, Q_0, de carbono-14 que había cuando la muestra dejó de absorberlo, denotando por t_0 al instante en que esto ocurrió y haciendo uso de (2.55) se obtiene que

$$pQ_0 = Q(t_1) = Q_0 e^{-\lambda(t_1 - t_0)}$$

y, por tanto, que

$$p = e^{-\lambda(t_1 - t_0)}$$

luego

$$\ln p = -\lambda(t_1 - t_0).$$

En consecuencia, el año del que la muestra data viene dado por

$$t_0 = t_1 + \frac{\ln p}{\lambda}. \tag{2.58}$$

Ejemplo 2.2.9. En el año 1947 se encontraron en unas cuevas en Qumrán, a orillas del Mar Muerto, siete rollos de pergamino con diversos manuscritos. En ellos se encuentran las copias manuscritas más antiguas de fragmentos del Antiguo Testamento. En 1994, haciendo uso del método del carbono-14,

Figura 2.3: Fragmento del rollo que contiene el Libro de Isaías, 1QIsa^a.

se fechó el rollo que contiene el Libro de Isaías. Para ello se analizó el rollo para ver cuál era el porcentaje de carbono-14 aún presente, resultando que contenía entre un 75 % y 77 % del nivel inicial de carbono. De acuerdo con este información y haciendo uso de la ecuación (2.58) se puede estimar que el rollo proviene de una fecha comprendida entre los años

$$y_0 = 1994 + \frac{\ln 0{,}75}{0{,}000121} \approx -384$$

y

$$y_0 = 1994 + \frac{\ln 0{,}77}{0{,}000121} \approx -167.$$

2.2.4. Transferencia de calor

Se denomina **flujo de calor** o **transferencia de calor** a la transferencia de energía que se establece entre un sistema y el medio que lo rodea debido exclusivamente a la diferencia de temperaturas. A la energía así transferida se le llama **calor**. Esta transferencia de energía de un lugar a otro se produce mediante tres mecanismos distintos: **conducción**, **convección** y **radiación**. Hay conducción dentro de un cuerpo o entre dos cuerpos que están en contacto. Durante la conducción la energía se transfiere por interacción entre átomos o moléculas pero los átomos y las moléculas no son transportados. La convección depende del movimiento de una masa de una región del espacio a otra. Durante la convección el calor es transferido directamente por el transporte de la materia. La radiación es la transferencia de calor a través del espacio en forma de ondas electromagnéticas. En la mayoría de las situaciones los tres mecanismos de transferencia se producen simultáneamente, aunque un mecanismo puede predominar sobre los otros.

Durante la transferencia de calor mediante los mecanismos de conducción y convección la tasa de variación de la temperatura de un cuerpo es aproximadamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio que lo rodea:

$$T'(t) = k(T - T_m) \tag{2.59}$$

donde T es la temperatura del cuerpo, T_m la del medio y k es la constante de proporcionalidad. Esto es lo que se conoce como la **ley de enfriamiento de Newton**. Sin embargo la transferencia mediante radiación se rige por la **ley de Stefan-Boltzmann** que dice que la energía neta radiada por un objeto que se encuentra a temperatura T en un ambiente a temperatura T_m es proporcional a la diferencia $T^4 - T_m^4$. Si la diferencia entre ambas temperaturas es pequeña, la diferencia anterior es aproximadamente proporcional a la diferencia de las temperaturas por lo que, en este caso, se puede considerar que un objeto radiante también satisface la ley de enfriamiento de Newton. En general, como hemos indicado antes la transferencia de calor se produce en proporción variable por los tres mecanismos. Si el objeto que estamos considerando tiene una temperatura homogénea y la trasferencia de calor al medio que le rodea se produce predominantemente por conducción o convección, o por ambos, sobre radiación, la ley de Newton sigue siendo válida incluso para grandes diferencias de temperaturas.

La ecuación (2.59) es una ecuación de variables separables cuya solución viene dada por la relación

$$\int \frac{dT}{T - T_m} = kt + c. \tag{2.60}$$

Integrando y tomando la exponencial en la igualdad resultante se llega a que

$$T - T_m = Ce^{kt} \tag{2.61}$$

donde C es una constante real.

Ejemplo 2.2.10. El cuerpo de una persona asesinada es descubierto a las 11 de la mañana. Media hora más tarde el médico forense determina que la temperatura del cadáver era de 34,78°C. La temperatura de la habitación era de $21,11$°C. Una hora más tarde, en la misma habitación, el forense vuelve a tomar la temperatura del cadáver, que en ese momento es de 34,11°C.

Sustituyendo los datos anteriores en la ecuación (2.61) se tiene, expresando el tiempo en horas a partir de las 11,30, que

$$C = 34{,}78 - 21{,}11 = 13{,}67$$

y

$$34{,}11 - 21{,}11 = 13{,}67e^k$$

luego

$$k = \ln \frac{13}{13{,}67} \approx -0{,}0502.$$

Supuesto que la persona fallecida tenia una temperatura de 37°C en el momento de asesinato y que la temperatura de la habitación se ha mantenido constante, podemos hallar el momento t_0 del asesinato despejando t_0 en la ecuación

$$37 - 21{,}11 = 13{,}67e^{kt_0}$$

lo que nos da

$$t_0 = \frac{1}{k} \ln \frac{37 - 21{,}11}{13{,}67} \approx -2{,}994496991.$$

En consecuencia la muerte se produjo aproximademante tres horas antes de las 11 y media, es decir a las 8 y media de la mañana.

2.3. Ecuaciones homogéneas

Sea n un entero no negativo. Una función f se dice que es **homogénea** de grado n si

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y) \tag{2.62}$$

para todo x, y, t tales que (x, y) y (tx, ty) pertenecen al dominio de f.

Ejemplo 2.3.1. Las funciones constantes son funciones homogéneas de grado 0.

Las funciones

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \frac{x^2 - 2xy}{x^2 + y^2} \\
f(x, y) &= x^2 + y^2 \\
f(x, y) &= xy^2 \\
f(x, y) &= \sqrt[3]{x^2y + y^3}
\end{aligned}$$

son homogéneas de grado 0, 2, 3 y 1 respectivamente.

Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.63}$$

donde M y N son funciones homogéneas del mismo grado se dice que es una **ecuación diferencial homogénea**.

En particular, una ecuación diferencial de primer orden dada en forma normal

$$y' = f(x,y), \tag{2.64}$$

es una ecuación diferencial homogénea si, y sólo si, la función f es una función homogénea de grado 0.

Para resolver este tipo de ecuaciones se comienza haciendo la sustitución $y = ux$. Si las funciones M y N son homogéneas de grado n, entonces

$$M(x,y) = M(x,xu) = x^n M(1,u), \quad N(x,y) = x^n N(1,u).$$

Utilizando lo anterior y la regla de la cadena, que nos dice que,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u,$$

la ecuación (2.63) se transforma en

$$x^n M(1,u) + \left(\frac{du}{dx}x + u\right) x^n N(1,u) = 0 \tag{2.65}$$

o, simplificando y reordenando,

$$xN(1,u)\frac{du}{dx} = -M(1,u) - uN(1,u) \tag{2.66}$$

que es una ecuación en variables separables, cuya solución, según vimos en 2.2 (2.30), viene dada por

$$\int \frac{N(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)}\, du = -\int \frac{dx}{x}.$$

Para obtener la solución de (2.63) es suficiente con integrar y reemplazar u por y/x.

Ejemplo 2.3.2. La ecuación

$$x^2 + 3y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} = 0$$

es una ecuación homogénea. Procediendo como antes se llega a

$$\int \frac{-2u}{(1+3u^2)-2u^2}\,du = -\int \frac{dx}{x}$$

o

$$\int \frac{2u}{1+u^2}\,du = \int \frac{dx}{x}$$

luego

$$\ln(1+u^2) = \ln|x| + c$$

con c una constante real. De aquí se deduce que

$$1+u^2 = C|x|$$

para alguna constante $C > 0$. Finalmente sustituyendo u por y/x, y quitando denominadores obtenemos la familia de soluciones en forma ímplicita

$$y^2 + x^2 = kx^3$$

donde k es es una constante real no nula.

2.4. Ecuaciones exactas

Una ecuación diferencial

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.67}$$

se dice que es **exacta** si existe una función f que admite derivadas parciales y tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N. \tag{2.68}$$

Si existe una función f satisfaciendo (2.68) entonces, aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$\begin{aligned} M(x,y(x)) + N(x,y(x))\frac{dy}{dx}(x) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\frac{dy}{dx}(x) \\ &= \frac{d}{dx}f(x,y(x)), \end{aligned}$$

por lo que la ecuación (2.67) queda

$$\frac{d}{dx}f(x,y(x)) = 0$$

que tiene como solución general la familia

$$f(x,y) = c.$$

Como vemos resolver una ecuación exacta es extremadamente sencillo una vez que se conoce la función f que satisface las condiciones (2.68). El problema, sin embargo, es que no siempre es sencillo reconocer cuando una ecuación diferencial es exacta.

Si las funciones M y N tienen derivadas continuas y verifican (2.68) entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

y, por el teorema de las derivadas cruzadas de Schwarz, se tiene que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2.69}$$

Por lo tanto esta condición es necesaria para que la ecuación (2.67) sea exacta. En general, esta condición no es suficiente, pero imponiendo ciertas condiciones sobre el dominio de las funciones se puede garantizar que lo sea.

Teorema 2.4.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto convexo. Si M y N son dos funciones reales de clase C^1 definidas en Ω, entonces existe una función f de clase C^1 en Ω satisfaciendo (2.68) si, y sólo si,*

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \tag{2.70}$$

para todo $(x, y) \in \Omega$.

Una vez que sabemos que una ecuación es exacta para resolverla hemos de encontrar la función f que satisface (2.68). Si la función f verifica que $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ entonces ha de ser de la forma

$$f(x, y) = \int M(x, y)\, dx + g(y) \tag{2.71}$$

para alguna función g que sólo depende de y. Si además $\frac{\partial f}{\partial y} = N$

$$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)\, dx, \tag{2.72}$$

y g será una primitiva de la función del segundo miembro que, por ser la ecuación exacta, sólo depende de y.

Ejemplo 2.4.2. La ecuación

$$3x^2 y + 4xy^2 + (x^3 + 4x^2 y + 9y^2)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.73}$$

es exacta porque

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 y + 4xy^2) = 3x^2 + 8xy = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 4x^2 y + 9y^2).$$

Si f satisface

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + 4xy^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 4x^2y + 9y^2$$

entonces, integrando la primera igualdad con respecto de x, se obtiene que

$$f(x,y) = x^3y + 2x^2y^2 + g(y), \tag{2.74}$$

y reemplazando la derivada de f con respecto de y en la segunda igualdad resulta que

$$x^3 + 4x^2y + 9y^2 = x^3 + 4x^2y + g'(y)$$

luego

$$g(y) = 3y^3 + c.$$

Reemplazando el valor de g en (2.74) resulta que la solución general de (2.73) es

$$x^3y + 2x^2y^2 + 3y^3 = C.$$

2.4.1. Factores integrantes

Es bastante obvio que dado un par arbitrario de funciones M y N lo más probable es que no satisfagan las condiciones (2.69). Dado que esta condición es necesaria para que la ecuación (2.67) sea exacta, resulta evidente que muy pocas ecuaciones de este tipo serán exactas. Sin embargo hay ecuaciones que aunque no son exactas son equivalentes a una ecuación exacta o se pueden transformar fácilmente en una ecuación exacta.

Ejemplo 2.4.3. La ecuación diferencial

$$y + 2x\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.75}$$

no es exacta porque

$$\frac{\partial}{\partial y}y = 1 \neq 2 = \frac{\partial}{\partial x}(2x).$$

Sin embargo, si multiplicamos la ecuación (2.75) por y, la ecuación resultante

$$y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.76}$$

es exacta. Además ambas ecuaciones tienen las mismas soluciones.

Surge entonces de manera natural la cuestión de si será posible transformar, mediante un procedimiento sencillo, una ecuación no exacta en otra exacta. Para responder a esta pregunta, observemos en primer lugar que si la ecuación

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{2.77}$$

tiene solución general

$$f(x,y)=c \tag{2.78}$$

con f una función diferenciable, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

luego

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

lo que implica que

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{M}=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{N}. \tag{2.79}$$

Llamando μ a la función cociente que aparece en (2.79) se tiene entonces que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\mu M \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\mu N.$$

Si multiplicamos la ecuación (2.77) por μ, la ecuación resultante

$$\mu(x,y)M(x,y)+\mu(x,y)N(x,y)\frac{dy}{dx}=0 \tag{2.80}$$

es exacta.

Una función μ se dice que es un **factor integrante** de la ecuación

$$M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}=0 \tag{2.81}$$

si la ecuación

$$\mu(x,y)M(x,y)+\mu(x,y)N(x,y)\frac{dy}{dx}=0 \tag{2.82}$$

es exacta.

La discusión previa nos dice que si la ecuación tiene solución, multiplicando la ecuación por una cierta función μ se convierte en una ecuación exacta, pero no nos dice cómo obtener la función μ si no conocemos la solución. Esto nos lleva a preguntarnos qué condiciones habrá de cumplir la función μ para que la ecuación

$$\mu(x,y)M(x,y)+\mu(x,y)N(x,y)\frac{dy}{dx}=0 \tag{2.83}$$

sea exacta. Supuesto que se verifican las hipótesis del teorema 2.4.1, la ecuación (2.82) es exacta si, y sólo si,

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

que desarrollando queda

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x}N + \mu\frac{\partial N}{\partial x},$$

o, reordenando los términos,

$$\frac{1}{\mu}\left(N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2.84}$$

Esta última ecuación es una ecuación en derivadas parciales que, en general, no es fácil de resolver.[7] Sin embargo, en algunos casos particulares, encontrar una solución particular no nula de (2.84) no es, en teoría, muy complicado. Veamos algunos ejemplos.

Supongamos que u es una función conocida de x e y y que el factor integrante que buscamos es función φ de u, es decir $\mu = \varphi \circ u$. En este caso (2.84) queda

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{d\varphi}{du}\circ u\right)\left(N\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2.85}$$

Para que esto ocurra

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y}} \tag{2.86}$$

ha de ser sólo función de u, es decir el cociente precedente ha de ser la forma $g \circ u$ para alguna función g. En este caso la ecuación (2.85) se convierte en

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{du} = g$$

que integrando nos lleva a que

$$\ln \varphi(u) = \int g(u)du$$

y, por tanto, que

$$\varphi(u) = \exp\left(\int g(u)du\right). \tag{2.87}$$

Recíprocamente se comprueba que si (2.86) es una función g que sólo depende de u entonces la función $\mu = \varphi \circ u$ con φ definida como en (2.87) es un factor integrante de la ecuación (2.81).

[7] Incluso puede que sea más complicada de resolver que la ecuación original.

Ejemplo 2.4.4. La ecuación diferencial

$$(3x + 2y + y^2) + (x + 4xy + 5y^2)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.88}$$

no es exacta porque, si $M(x, y) = 3x + 2y + y^2$ y $N(x, y) = x + 4xy + 5y^2$,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2 + 2y \neq 1 + 4y = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Sin embargo, esta ecuación tiene un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = \varphi(x + y^2)$, para alguna función φ. En efecto, poniendo $u(x, y) = x + y^2$, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial u}{\partial x} - M\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - 2yM} &= \\ &= \frac{1 - 2y}{x + 4xy + 5y^2 - 6xy - 4y^2 - 2y^3} = \\ &= \frac{1 - 2y}{x - 2xy + y^2 - 2y^3} = \frac{1}{x + y^2}\end{aligned}$$

es una función de $x + y^2$. Además, por (2.87),

$$\varphi(u) = \exp\left(\int \frac{1}{u}\, du\right) = u$$

y, por tanto, $\mu(x, y) = x + y^2$.

Multiplicando la ecuación (2.88) por μ se obtiene la ecuación exacta

$$(x + y^2)(3x + 2y + y^2) + (x + y^2)(x + 4xy + 5y^2)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.89}$$

Para resolver esta ecuación, buscamos una función f tal que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= (x + y^2)(3x + 2y + y^2) = 3x^2 + 2xy + 4xy^2 + 2y^3 + y^4 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= (x + y^2)(x + 4xy + 5y^2) = x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + 5y^4.\end{aligned}$$

La primera ecuación nos dice que

$$f(x, y) = x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + g(y)$$

para alguna función g que depende de y pero no de x. La segunda ecuación nos dice que

$$f(x, y) = x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 + h(x)$$

para alguna función h que depende de x pero no de y. Igualando ambas expresiones se tiene que

$$x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + g(y) = x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 + h(x)$$

y simplificando queda que

$$x^3 + g(y) = y^5 + h(x)$$

de donde se deduce que

$$g(y) = y^5 + k, \quad h(x) = x^3 + k$$

para alguna constante k real. En consecuencia la solución de la ecuación (2.89), y también de (2.88), viene dada por la familia de curvas uniparamétricas

$$x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 = c.$$

En la siguiente tabla aparecen algunos casos particulares de funciones u y su correspondiente función g.

u	$g(u)$
x	$\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$
y	$-\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M}$
$x - y$	$\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N + M}$
xy	$\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM}$
$\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) y^2}{yN + xM}$
$x^2 + y^2$	$\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{2(xN - yM)}$

Si la expresión de la segunda columna sólo depende del correspondiente valor de u en la primera columna, entonces la ecuación (2.81) tiene un factor integrante de la forma $\mu = \varphi \circ u$ con φ dada por (2.87).

En la práctica, salvo que sepamos de antemano cuál es la función u lo normal es limitarse a aplicar el procedimiento anterior únicamente para ver si la ecuación admite factores integrantes que dependan sólo de x o sólo de y.[8]

Según hemos visto más arriba, para que podamos encontrar un factor integrante μ que sólo dependa de x, la condición que se ha de verificar es que

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \tag{2.90}$$

sea una función g que sólo dependa de x. En este caso

$$\mu(x,y) = \exp\left(\int g(x)dx\right) \tag{2.91}$$

es un factor integrante de la ecuación que sólo depende de x.

Análogamente, para que exista un factor integrante μ que sólo dependa de y, la condición que se ha de verificar es que

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} \tag{2.92}$$

sea una función g que sólo dependa de y. En este caso la función

$$\mu(x,y) = \exp\left(\int g(y)dy\right) \tag{2.93}$$

es el factor integrante buscado.

Ejemplo 2.4.5. La ecuación diferencial

$$y^2 + 4ye^x + 2(y+e^x)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.94}$$

no es exacta porque, si $M(x,y) = y^2 + 4ye^x$ y $N(x,y) = 2(y+e^x)$,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y + 4e^x \neq 2e^x = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Sin embargo,

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{2y + 4e^x - 2e^x}{2(y+e^x)} = 1.$$

Por lo visto más arriba,

$$\mu(x,y) = \exp\left(\int 1\,dx\right) = e^x$$

[8] Es decir, factores integrantes de la forma $\mu = \varphi \circ u$ con $u(x,y) = x$ o $u(x,y) = y$.

es un factor integrante de la ecuación (2.94), luego

$$y^2 e^x + 4ye^{2x} + 2e^x(y + e^x)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.95}$$

es una ecuación diferencial exacta equivalente a (2.94). Existe, por tanto, una función f tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 e^x + 4ye^{2x} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2e^x(y + e^x).$$

Integrando en ambas relaciones se sigue que

$$f(x, y) = y^2 e^x + 2ye^{2x} + g(y)$$

y

$$f(x, y) = y^2 e^x + 2ye^{2x} + h(x).$$

En consecuencia $h(x) = g(y) = c$ y la solución general de la ecuación (2.95) es

$$y^2 e^x + 2ye^{2x} = C.$$

Ejemplo 2.4.6. Consideremos la ecuación

$$6xy + (4y + 9x^2)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2.96}$$

Sean $M(x, y) = 6xy$ y $N(x, y) = 4y + 9x^2$. Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x \neq 18x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

la ecuación (2.96) no es exacta. Sin embargo

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{18x - 6x}{6xy} = \frac{2}{y}$$

sólo depende de y. En consecuencia la función

$$\mu(x, y) = \exp\left(\int \frac{2}{y}\, dy\right) = y^2$$

es un factor integrante de la ecuación (2.96), por lo que la ecuación

$$6xy^3 + (4y + 9x^2)y^2\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.97}$$

es exacta. Si f verifica que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^3 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = (4y + 9x^2)y^2$$

entonces

$$f(x, y) = 3x^2y^3 + g(y)$$

y

$$f(x, y) = y^4 + 3x^2y^3 + h(x),$$

luego $g(y) = y^4 + k$ y $h(x) = k$. En consecuencia, la solución general de (2.96) es

$$y^4 + 3x^2y^3 = c.$$

Obviamente lo más normal es que la ecuación no posea un factor integrante que sólo dependa de x o de y. En este caso puede ocurrir que, con la ayuda de alguna tabla como la que aparece en la página 53, un análisis cuidadoso de los datos nos lleve a encontrar un factor integrante.

Ejemplo 2.4.7. La ecuación diferencial

$$(xy^3 + 2x^2y^2 - y^2) + (x^2y^2 + 2x^3y - 2x^2)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.98}$$

no es exacta porque, si $M(x, y) = xy^3 + 2x^2y^2 - y^2$ y $N(x, y) = x^2y^2 + 2x^3y - 2x^2$,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3xy^2 + 4x^2y - 2y \neq 2xy^2 + 6x^2y - 4x = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Sin embargo, observando que

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = xy^2 - 2x^2y + 4x - 2y = xy(y - 2x) - 2(y - 2x) = (xy - 2)(y - 2x)$$

y que

$$M(x, y) = y(xy^2 + 2x^2y - y)$$

y

$$N(x, y) = x(xy^2 + 2x^2y - 2x)$$

resulta que

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{yN - xM} = \frac{(xy - 2)(y - 2x)}{xy(y - 2x)} = 1 - \frac{2}{xy}$$

es función de xy. Consultando la tabla de la página 53 vemos que en este caso la ecuación (2.98) tiene un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = \varphi(xy)$, donde, según (2.87),

$$\varphi(u) = \exp\left(\int \left[1 - \frac{2}{u}\right] du\right) = u^{-2}e^{u}.$$

En resumen, hemos obtenido que

$$\mu(x, y) = \frac{1}{x^2y^2}e^{xy}$$

es un factor integrante de (2.98).

La solución de la ecuación exacta resultante de multiplicar (2.98) por μ:

$$\left(\frac{y}{x} + 2 - \frac{1}{x^2}\right) e^{xy} + \left(1 + 2\frac{x}{y} - \frac{2}{y^2}\right) e^{xy}\frac{dy}{dx} = 0, \qquad (2.99)$$

es de la forma $f(x, y) = c$, donde

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int \left(\frac{y}{x} + 2 - \frac{1}{x^2}\right) e^{xy}dx \\ &= \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right) e^{xy} + g(y) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g'(y) = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right) e^{xy}\right] &= \mu(x, y)N(x, y) - \left(1 - \frac{2}{y^2} + 2\,\frac{x}{y}\right) e^{xy} = \\ &= \left(1 + 2\frac{x}{y} - \frac{2}{y^2}\right) e^{xy} - \left(1 - \frac{2}{y^2} + 2\,\frac{x}{y}\right) e^{xy} = 0. \end{aligned}$$

Hemos obtenido así que la familia uniparamétrica de curvas

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right) e^{xy} = c \qquad (2.100)$$

es una familia de soluciones de la ecuación (2.98). Además esta ecuación tiene una solución singular adicional, la función constante $y \equiv 0$, que no está incluida en la familia (2.100). Esta función, sin embargo, no es solución de la ecuación (2.99).[9]

Otra alternativa es buscar factores integrantes de la forma

$$\mu(x, y) = X(x)Y(y).$$

[9]Obsérvese que al multiplicar por μ estamos suponiendo implícitamente que y no se anula. Esto hace que la solución $y \equiv 0$ se pierda al multiplicar la ecuación original por el factor integrante.

Para que μ sea un factor integrante de la ecuación (2.81), por (2.84), se ha de verificar que

$$\frac{N}{X}X' - \frac{M}{Y}Y' = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2.101}$$

Si, existen dos funciones g y h, reales de variable real, tales que

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = Ng(x) - Mh(y) \tag{2.102}$$

entonces, la condición (2.101) se satisface si

$$\frac{1}{X}X' = g(x) \quad \text{y} \quad \frac{1}{Y}Y' = h(y) \tag{2.103}$$

es decir, si

$$X(x) = \exp\left(\int g(x)\,dx\right) \quad \text{e} \quad Y(y) = \exp\left(\int h(y)\,dy\right). \tag{2.104}$$

Ejemplo 2.4.8. Consideremos la ecuación diferencial

$$(y - y^2) + xy' = 0. \tag{2.105}$$

En este caso $M(x,y) = y - y^2$ y $N(x,y) = x$ por lo que

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 1 - 2y - 1 = -2y = -\frac{2}{x}N + \frac{2}{y}M.$$

Por (2.104), $\mu(x,y) = X(x)Y(y)$ con

$$X(x) = Y(x) = \exp\left(-\int \frac{2}{x}\,dx\right) = x^{-2}$$

es un factor integrante de la ecuación (2.105). Multiplicando esta ecuación por μ tenemos la ecuación exacta

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{y} - 1\right) + \frac{1}{xy^2}y' = 0. \tag{2.106}$$

Si f es tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{y} - 1\right)$$

entonces ha de ser de la forma

$$f(x,y) = -\frac{1}{x}\left(\frac{1}{y} - 1\right) + \varphi(y)$$

y si
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{xy^2}$$
entonces
$$\frac{1}{xy^2} + \varphi'(y) = \frac{1}{xy^2}.$$
De lo anterior se concluye que la solución de la ecuación (2.105) es
$$-\frac{1}{x}\left(\frac{1}{y} - 1\right) = c$$
o, equivalentemente
$$y(x) = \frac{1}{1 - xc}.$$

Obsérvese que
$$-\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = \frac{2}{1 - y}$$
por lo que la ecuación (2.105) también tiene un factor integrante que depende sólo de y
$$\mu_1(y) = \exp\left(\int \frac{2}{1 - y}\, dy\right) = \frac{1}{(1 - y)^2}.$$

Si se conocen dos factores integrantes linealmente independientes de una ecuación, es posible obtener su solución de manera muy sencilla. Este hecho se basa en el siguiente resultado.

Lema 2.4.9. *Si la ecuación*
$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.107}$$
es exacta y μ es un factor integrante, no constante, de la ecuación entonces
$$\mu(x, y) = c$$
es la solución general de (2.107).

Demostración. Se deduce de (2.84) y de que la ecuación es exacta que
$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} = M\frac{\partial \mu}{\partial y}.$$
Multiplicando (2.107) por $\partial\mu/\partial y$ y aplicando lo anterior se tiene que
$$0 = M\frac{\partial \mu}{\partial y} + N\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{dy}{dx} = N\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = N\frac{d}{dx}(\mu(x, y(x))$$
de donde se deduce que
$$\frac{d}{dx}(\mu(x, y(x)) = 0$$
y, por lo tanto, que la solución y de la ecuación (2.107) satisface la conclusión del lema. $\square$

Teorema 2.4.10. *Si μ_1 y μ_2 son dos factores integrantes de la ecuación*

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.108}$$

y μ_1/μ_2 no es constante, entonces

$$\mu_1(x,y) = c\mu_2(x,y)$$

es la solución general de la ecuación.

Demostración. Por hipótesis, la ecuación

$$\mu_2 M + \mu_2 N\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.109}$$

es exacta. Como la ecuación

$$\mu_1 M + \mu_1 N\frac{dy}{dx} = 0$$

también es exacta, μ_1/μ_2 es un factor integrante de (2.109). Por el lema precedente $\mu_1/\mu_2 = c$ es solución de (2.109) y, por tanto, de (2.108). □

Podemos aplicar este teorema a la ecuación (2.105) del ejemplo 2.4.8. Hemos visto que tiene dos factores integrantes $x^{-2}y^{-2}$ y $(1-y)^{-2}$. El teorema previo nos dice que $(1-y)^2 = cx^2y^2$, con $c \geqslant 0$ es la solución general de (2.105) o, equivalentemente,

$$1 - y = cxy, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Esta solución, obviamente, es la misma que la obtenida anteriormente.

2.5. Ecuaciones lineales de primer orden

Una ecuación diferencial

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{2.110}$$

se dice que es **lineal**, si la función F es lineal como función de la función incógnita y de sus derivadas. Esto equivale a decir que una ecuación diferencial es lineal si se puede escribir en la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \tag{2.111}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ y b son funciones sólo de x. Dividiendo ambos miembros de (2.111) por a_n, si se puede, se obtiene la **forma normal o estándar** de la ecuación lineal.

En particular,

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{2.112}$$

es la forma normal de la ecuación lineal de primer orden. En general, salvo mención expresa de lo contrario, supondremos que a y b son funciones continuas.

Comenzaremos con el caso particular en que $b \equiv 0$, es decir con la ecuación

$$y' + a(x)y = 0. \tag{2.113}$$

Esta ecuación se denomina ecuación lineal **homogénea**[10] de primer orden. Si $b \not\equiv 0$ la ecuación (2.112), se denomina ecuación lineal **no homogénea** de primer orden. La ecuación (2.113) se dice que ea la ecuación homogénea asociada a la ecuación (2.112).

La ecuación lineal homogénea (2.113) es una ecuación en variables separables que vimos en 2.2.3 que tiene como solución general

$$y(x) = C \exp\left(-\int a(x)\,dx\right) \tag{2.114}$$

con C un número real.

Vamos ahora a ver como se resuelve la ecuación no homogénea. El primer método que vamos a estudiar se basa en encontrar un factor integrante de la ecuación. Si ponemos $M(x,y) = a(x)y - b(x)$ y $N(x,y) = 1$ entonces

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = a(x)$$

que sólo depende de x. Aplicando entonces lo visto en 2.4.1 resulta que

$$\mu(x,y) = \exp\left(\int a(x)\,dx\right)$$

es el factor integrante buscado. Multiplicando por μ la ecuación (2.112) se convierte en una ecuación exacta:

$$\exp\left(\int a(x)\,dx\right) y' + a(x)\exp\left(\int a(x)\,dx\right) y = b(x)\exp\left(\int a(x)\,dx\right),$$

que, observando que el primer término es la derivada de un producto, se puede poner como

$$\frac{d}{dx}\left[\exp\left(\int a(x)\,dx\right) y\right] = b(x)\exp\left(\int a(x)\,dx\right).$$

[10] La palabra *homogénea* se emplea aquí con un sentido diferente al empleado en la sección 2.3. Una ecuación diferencial homogénea no tiene por qué ser lineal (véase el ejemplo 2.3.2) y una ecuación lineal homogénea puede no ser una ecuación diferencial homogénea.

Integrando se obtiene que

$$\exp\left(\int a(x)\,dx\right) y = \int\left[b(x)\exp\left(\int a(x)\,dx\right)\right]dx + c$$

luego

$$y(x) = \exp\left(-\int a(x)\,dx\right)\left[\int\left\{b(x)\exp\left(\int a(x)\,dx\right)\right\}dx + c\right]. \tag{2.115}$$

Ejemplo 2.5.1. La ecuación

$$y' - 2xy = x^3 \tag{2.116}$$

tiene como solución

$$y(x) = e^{x^2}\left[\int x^3 e^{-x^2}\,dx + c\right].$$

Integrando por partes se tiene que

$$\int x^3 e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + \int x e^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(x^2+1\right)$$

luego

$$y(x) = e^{x^2}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(x^2+1\right) + c\right] = ce^{x^2} - \frac{1}{2}\left(x^2+1\right).$$

Obsérvese que cada solución de (2.112) es la suma de una solución de la ecuación homogénea (2.113):

$$c\exp\left(-\int a(x)\,dx\right)$$

y una solución particular de (2.112):

$$\exp\left(-\int a(x)\,dx\right)\left[\int\left\{b(x)\exp\left(\int a(x)\,dx\right)\right\}dx\right].$$

Recíprocamente, si y_p es una solución de (2.112) e y_h es una solución de la ecuación homogénea asociada, entonces $y_p + y_h$ es una solución de (2.112). En efecto,

$$(y_p + y_h)' + a(x)(y_p + y_h) = y_p' + a(x)y_p + y_h' + a(x)y_h = b(x).$$

En consecuencia, para resolver (2.112) es suficiente con encontrar una solución particular de la ecuación y resolver la ecuación homogénea asociada.

También podemos observar en (2.115) que la solución es el producto de una función $c(x)$ por una solución $u(x)$ de la ecuación homogénea. Esta observación nos proporciona otro método para encontrar las soluciones de (2.112). Supongamos que una función y es el producto de una función c y una solución u de la ecuación homogénea. Para que y sea solución de (2.112) se habrá de verificar que

$$\begin{aligned} y'(x) + a(x)y(x) =& c'(x)u(x) + c(x)u'(x) + a(x)c(x)u(x) \\ =& c'(x)u(x) + c(x)\left(u'(x) + a(x)u(x)\right) \\ =& c'(x)u(x) = b(x) \end{aligned} \tag{2.117}$$

luego

$$c(x) = \int \frac{b(x)}{u(x)}\,dx + c. \tag{2.118}$$

Si

$$u(x) = \exp\left(\int -a(x)\,dx\right) \tag{2.119}$$

la solución obtenida por el método que acabamos de ver sería precisamente (2.115).

Otro método muy parecido al que acabamos de ver[11] de es el que se denomina **método de variación de las constantes**. En este método partiendo de la solución general de la ecuación homogénea asociada

$$y_h(x) = c\exp\left(\int -a(x)\,dx\right)$$

se buscan soluciones de la ecuación (2.112) del tipo de y_h pero cambiando la constante c por una función de $c(x)$. Es decir, se buscan soluciones de la forma $y(x) = c(x)u(x)$ donde u es precisamente la función que aparece en (2.119). Razonando como en (2.117) pero para este caso concreto se llega a que $c(x)$ es como en (2.118), lo que nos vuelve a dar nuevamente la solución obtenida en (2.115).

Tanto en este caso como en los precedentes no es preciso recordar las formulas de la solución sino simplemente recordar el método empleado.

Ejemplo 2.5.2. Vamos a utilizar el método de variación de las constantes para buscar una solución de la ecuación

$$y' + y = \frac{1}{1+x^2}. \tag{2.120}$$

En este caso la solución general de la ecuación homogénea es

$$c\exp\left(-\int dx\right) = ce^{-x}.$$

[11] De hecho es repetir lo anterior pero para una solución concreta de la ecuación homogénea.

Buscamos ahora soluciones de (2.120) de la forma

$$y(x) = c(x)e^{-x}.$$

En este caso se ha de verificar que

$$c'(x)e^{x} - c(x)e^{x} + c(x)e^{x} = c'(x)e^{-x} = \frac{1}{1+x^2}$$

luego

$$c(x) = \int \frac{e^x}{1+x^2}\, dx + c.$$

La solución general de (2.120) es por tanto

$$y(x) = e^{-x}\left(\int \frac{e^x}{1+x^2}\, dx + c\right).$$

Si consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.121}$$

con a y b funciones continuas, eligiendo primitivas adecuadas en (2.115), se puede poner la solución general de la ecuación en la forma

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt\right)\left[\int_{x_0}^{x}\left\{b(s)\exp\left(\int_{x_0}^{s} a(t)\, dt\right)\right\} ds + c\right].$$

Sustituyendo x por x_0 e y por y_0, se concluye que $c = y_0$, y, por tanto, que el problema de valor inicial (2.121) tiene como única solución la función

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt\right)\left[\int_{x_0}^{x}\left\{b(s)\exp\left(\int_{x_0}^{s} a(t)\, dt\right)\right\} ds + y_0\right].$$

2.5.1. Problemas de mezclas

Muchos problemas que aparecen en biología y en química e incluso en ciencias sociales presentan características comunes que hacen que todos ellos puedan ser englobados en una misma categoría de problemas ya que todos ellos responden a un mismo esquema. Este clase de problemas son los denominados problemas de mezclas o problemas de compartimentos.

Comenzaremos explicando en qué consisten este tipo problemas considerando un modelo sencillo. Supongamos que tenemos un recipiente que contiene una determinada sustancia y que en ese recipiente está entrando, a una cierta velocidad, otra sustancia que se mezcla con la primera y que una

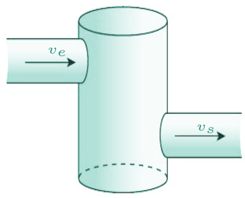


Figura 2.4: Un modelo de recipiente de un problema de muestras

vez mezcladas ambas sustancias la mezcla sale del recipiente a una velocidad en principio distinta de la velocidad de entrada de la segunda sustancia. Este podía ser por ejemplo el caso de un tanque que contiene agua al que por un tubo se le añade un determinado producto químico, puro o disuelto en agua, que una vez mezclado con el agua sale por otro conducto (figura 2.4).

La cantidad de sustancia que se añade al tanque se llama flujo de entrada, y la cantidad de sustancia que sale del tanque se llama flujo de salida. Suponemos que mediante algún procedimiento la mezcla se mantiene homogénea de manera que la concentración de la sustancia disuelta es la misma en todo el tanque.

Supongamos que $Q(t)$ es la cantidad de la sustancia disuelta en el tanque de agua en el instante t. En un intervalo de tiempo $[\tau, \tau + h]$ dicha cantidad pasa de $Q(\tau)$ a $Q(\tau+h)$. La variación $Q(\tau+h) - Q(\tau)$ es el resultado del flujo de entrada menos el flujo de salida en el intervalo $[\tau, \tau + h]$. Si la sustancia entra en el tanque disuelta en agua a una velocidad en el instante t de $v_e(t)$ litros por segundo y con una concentración de $c_e(t)$ gramos por litro, el flujo de entrada en el intervalo $[\tau, \tau + h]$ será

$$\int_{\tau}^{\tau+h} v_e(t) c_e(t)\, dt. \tag{2.122}$$

Por otro lado, la concentración de la mezcla en el instante t, $c(t)$, depende de la cantidad de sustancia presente en el tanque y del volumen total de la mezcla $V(t)$:

$$c(t) = \frac{Q(t)}{V(t)},$$

luego, si la mezcla sale con una velocidad de $v_s(t)$ litros por segundo, el flujo de salida en $[\tau, \tau + h]$ será

$$\int_{\tau}^{\tau+h} v_s(t)\, \frac{Q(t)}{V(t)}\, dt.$$

En consecuencia

$$Q(\tau + h) - Q(\tau) = \int_{\tau}^{\tau+h} c_e(t) v_e(t)\, dt - \int_{\tau}^{\tau+h} v_s(t)\, \frac{Q(t)}{V(t)}\, dt.$$

Dividiendo ambos miembros por h y haciendo tender h a 0 se obtiene la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dQ}{dt} = c_e v_e - \frac{v_s}{V} Q. \tag{2.123}$$

Si V_0 es el volumen de liquido en el tanque en el instante inicial, que por comodidad suponemos es $t_0 = 0$, el volumen en el instante t es el volumen inicial V_0 más la diferencia entre el volumen que ha entrado menos el que ha salido:

$$V(t) = V_0 + \int_0^t v_e(\tau)\, d\tau - \int_0^t v_s(\tau)\, d\tau = V_0 + \int_0^t (v_e(\tau) - v_s(\tau))\, d\tau. \tag{2.124}$$

Si las velocidades de entrada y salida son la misma el volumen se mantiene constante.

Si, como sucede en muchas ocasiones, ambas velocidades, la de entrada y la de salida, son constantes (2.124) queda

$$V(t) = V_0 + t(v_e - v_s). \tag{2.125}$$

Ejemplo 2.5.3. Consideremos un tanque de 100 m^3 de capacidad lleno de agua. El agua contiene una cierta sustancia contaminante disuelta. La concentración de dicha sustancia es de 0,6 $\mathrm{g/m}^3$. Se bombea agua más limpia, con una concentración de sólo $0,15$ $\mathrm{g/m}^3$ de materia contaminante, a una velocidad de 5 m^3/s. El agua sale del tanque por un grifo a la misma velocidad con la que entra.

Queremos determinar la cantidad y la concentración de la sustancia contaminante en el tanque en cada momento. Para ello, si denotamos por $Q(t)$ la cantidad de sustancia contaminante en el tanque en el instante t, aplicando la ecuación (2.123) a nuestro caso tenemos que

$$\frac{dQ}{dt} = 0{,}15 \times 5 - \frac{5}{100} Q = 0{,}75 - \frac{1}{20} Q.$$

Aplicando el método de los factores integrantes se obtiene que

$$Q(t) = \exp\Big(-\frac{1}{20}t\Big)\left[\int 0{,}75 \exp\Big(\frac{1}{20}t\Big)\, dt + c\right] = ce^{-\frac{t}{20}} + 15. \tag{2.126}$$

Para determinar c hacemos uso del dato que nos dice que inicialmente la concentración del contaminante era de 0,6 $\mathrm{g/m}^3$. Como el tanque tiene una capacidad de 100 m^3 resulta que

$$Q(0) = 0{,}6 \times 100 = 60g$$

y sustituyendo en (2.126) para $t = 0$

$$60 = c + 15, \quad \text{luego} \quad c = 45.$$

En consecuencia, la cantidad de sustancia contaminante en el instante t es

$$Q(t) = 45e^{-\frac{t}{20}} + 15 \tag{2.127}$$

y su concentración

$$c(t) = \frac{Q(t)}{100} = 0{,}45e^{-\frac{t}{20}} + 0{,}15.$$

Obsérvese que cuando t tiende a infinito la función c tiende a 0,15. Esto nos dice que a largo plazo la concentración de la sustancia contaminante en el tanque tiende a aproximarse a la concentración de dicha sustancia en el agua que entra que es 0,15 g/m^3.

Ejemplo 2.5.4. Un depósito de agua con capacidad para 500 litros se encuentra lleno de agua pura hasta la mitad. Se le añade agua que contiene sal disuelta con una concentración de 12 g/l a una velocidad de 10 l/min. El agua que entra se mezcla con la existente en el depósito y sale por una tubería a una velocidad de 5 l/min. Una vez alcanzada la capacidad máxima el agua rebosa del depósito. Queremos saber cuál es la cantidad y la concentración de sal.

Inicialmente, hasta que el depósito se llena y empieza a rebosar, la diferencia de velocidad entre el flujo de entrada y el de salida es de 5 l/min, lo que hace que el volumen del agua en el depósito vaya aumentando, de acuerdo con (2.124), según la fórmula

$$V(t) = 250 + 5t$$

donde $V(t)$ denota el volumen en litros del depósito t minutos después del instante inicial, que suponemos es $t = 0$. El depósito alcanzará su capacidad máxima cuando el volumen sea $V(t) = 500$ es decir cuando

$$250 + 5t = 500 \quad \text{o} \quad t = \frac{250}{5} = 50\,\text{minutos}.$$

Hasta ese momento, si denotamos por $Q(t)$ la cantidad de sal que hay en el depósito en el instante t, la concentración de sal será

$$c(t) = \frac{Q(t)}{V(t)} = \frac{Q(t)}{250 + 5t}.$$

La tasa de variación de la cantidad de sal viene dada por

$$Q'(t) = 12 \times 10 - \frac{5}{250 + 5t} Q(t)$$

que reordenando los términos y simplificando se puede escribir

$$Q' + \frac{Q}{50 + t} = 120. \tag{2.128}$$

Un factor integrante de esta ecuación es la función

$$\mu(t, y) = \exp\left(\int_0^t \frac{1}{50+s}\,ds\right) = 50 + t.$$

Multiplicando por μ la ecuación se llega a la ecuación

$$\frac{d}{dt}\big[(50+t)Q\big] = 120(50+t)$$

cuya solución general es

$$(50+t)Q(t) = 60(50+t)^2 + c.$$

Como $Q(0) = 0$ la constante c vale $-60 \times 50^2 = -15 \times 10^4$. En consecuencia, si $t \leqslant 50$ minutos

$$Q(t) = 60(50+t) - \frac{15 \times 10^4}{50+t} \tag{2.129}$$

y

$$c(t) = 12 - \frac{3 \times 10^4}{(50+t)^2}. \tag{2.130}$$

Una vez que el depósito ha alcanzado su capacidad máxima, los flujos de entrada y salida coinciden y el volumen de agua, por tanto, se mantiene constante $V = 500$. Ahora la variación de la cantidad de sal viene dada por

$$Q'(t) = 120 - \frac{10}{500}Q(t) = 120 - \frac{Q(t)}{50}. \tag{2.131}$$

La solución de esta ecuación es

$$Q(t) = e^{-\frac{t}{50}}\big(120 \times 50e^{\frac{t}{50}} + k\big) = 6 \times 10^3 + ke^{-\frac{t}{50}}.$$

Como, por (2.129), $Q(50) = 6 \times 10^3 - 15 \times 10^2 = 4500$, resulta que

$$k = e(4500 - 6000) = -1500e.$$

En consecuencia, para $t > 50$

$$Q(t) = 6000 - 1500e^{1-\frac{t}{50}}$$

y

$$c(t) = \frac{Q(t)}{V(t)} = \frac{6000 - 1500e^{1-\frac{t}{50}}}{500} = 12 - 3e^{1-\frac{t}{50}}.$$

Cuando t tiende a infinito la concentración tiende a 12 g/l, como era de esperar.

Los problemas de mezclas no se limitan a las situaciones descritas en los ejemplos precedentes sino que, como ya dijimos al principio de esta sección, aparecen en contextos muy diversos.

Ejemplo 2.5.5. Un método de administrar medicamentos a los pacientes es lo que se denomina administración por vía intravenosa. Este método consiste en introducir los medicamentos directamente en el torrente circulatorio a través de las venas.

Supongamos que a un paciente de un hospital se le está suministrando una cierta medicación por vía intravenosa mediante un catéter del que gotea el medicamento a una velocidad constante de v_0 miligramos por minuto. Supongamos también que el medicamento se dispersa a través de todo el cuerpo y que el volumen V del torrente circulatorio, formado por la sangre en el cuerpo del paciente mas el medicamento suministrado, se mantiene constante y que el medicamento se elimina a una velocidad proporcional a su concentración. La concentración $c(t)$ en el instante t es el cociente entre la cantidad de medicamento presente en la sangre en ese instante, $Q(t)$, y el volumen del torrente circulatorio

$$c(t) = \frac{Q(t)}{V}.$$

Queremos determinar la concentración de medicamento en la sangre, $c(t)$, y la cantidad total de medicamento $Q(t)$.

La tasa de variación de $Q(t)$ vendrá dada por la ecuación

$$Q' = v_0 - k\frac{Q}{V}$$

o

$$Q' + \frac{k}{V}Q = v_0 \tag{2.132}$$

donde k es una constante positiva. Esta es una ecuación lineal que tiene un factor integrante

$$\mu(t, y) = \exp\left(\int \frac{k}{V}\, dt\right) = e^{\frac{k}{V}t}.$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (2.132) por μ se tiene

$$e^{\frac{k}{V}t}Q' + e^{\frac{k}{V}t}\frac{k}{V}Q = v_0 e^{\frac{k}{V}t}$$

o

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{k}{V}t}Q\right) = v_0 e^{\frac{k}{V}t}$$

e integrando en cada lado de la ecuación se obtiene que

$$e^{\frac{k}{V}t}Q = \int v_0 e^{\frac{k}{V}t}\, dt + C$$

luego

$$Q(t) = e^{-\frac{k}{V}t}\left[v_0\frac{V}{k}e^{\frac{k}{V}t} + C\right] = \frac{v_0 V}{k} + Ce^{-\frac{k}{V}t}.$$

Suponiendo que en el instante inicial, $t = 0$, no hay medicamento en la sangre, es decir $Q(0) = 0$, se obtiene que

$$C = -\frac{v_0 V}{k}$$

y por tanto

$$Q(t) = \frac{v_0 V}{k} - \frac{v_0 V}{k} e^{\frac{k}{V} t} = \frac{v_0 V}{k} \big(1 - e^{-\frac{k}{V} t}\big).$$

y la concentración

$$c(t) = \frac{v_0}{k} \big(1 - e^{-\frac{k}{V} t}\big).$$

2.6. Métodos de sustitución

Hemos visto al estudiar las ecuaciones homogéneas cómo un cambio de variable convenientemente elegido nos puede permitir resolver una ecuación que, en principio, no sabíamos resolver. Este es un procedimiento que se puede emplear en general para tratar de convertir una ecuación que queramos resolver en una ecuación de un tipo que sepamos resolver.

Obviamente no existe un método general para elegir el cambio de variable adecuado para cada caso. Sin embargo hay algunas situaciones en las que sí hay ciertos cambios que pueden ser aconsejables. A continuación vamos a ver algunos ejemplos.

2.6.1. Ecuaciones de la forma $y' = f(ax + by + c)$

La ecuación

$$y' = f(ax + by + c) \tag{2.133}$$

se reduce a una ecuación de variables separables mediante el cambio

$$u = ax + by + c. \tag{2.134}$$

En efecto, en este caso, como

$$u' = a + by'$$

la ecuación (2.133) se transforma en la ecuación

$$u' = a + bf(u)$$

que es de variables separables.

Ejemplo 2.6.1. La ecuación

$$y' = (2x - y)^2 + 1 \tag{2.135}$$

mediante el cambio

$$u = 2x - y$$

se transforma en la ecuación

$$u' = 2 - (u^2 + 1) = 1 - u^2 \tag{2.136}$$

cuya solución es

$$\int \frac{du}{1-u^2} = x + c \qquad (c \in \mathbb{R}). \tag{2.137}$$

Como

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\right)$$

se tiene que

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\left(\ln|1+u| - \ln|1-u|\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|$$

que sustituyendo en (2.137) y operando nos da que

$$\frac{1+u}{1-u} = Ce^{2x}$$

para C una constante real. Despejando u se tiene que

$$u = \frac{Ce^{2x} - 1}{Ce^{2x} + 1}.$$

Como $u^2 - 1$ se anula si $u = \pm 1$, la ecuación (2.136) además de las soluciones anteriores tiene dos soluciones singulares $u \equiv 1$ y $u \equiv -1$.

En consecuencia las soluciones de la ecuación (2.135) son las funciones

$$y(x) = 2x - \frac{Ce^{2x} - 1}{Ce^{2x} + 1}, \qquad (C \in \mathbb{R})$$

e

$$y(x) = 2x - 1, \qquad \text{e} \qquad y(x) = 2x + 1.$$

2.6.2. Ecuaciones de la forma $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$

Si la ecuación es de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right) \tag{2.138}$$

y $ab' - a'b \neq 0$,[12] el cambio

$$u = x - x_0, \quad v = y - y_0$$

[12] Esta condición es equivalente a que las rectas $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ se corten.

donde (x_0, y_0) es el punto de corte de las rectas $ax+by+c=0$ y $a'x+b'y+c'=0$, transforma la ecuación en la ecuación homogénea

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au+bv}{a'u+b'v}\right).$$

Si $ab' = a'b$ entonces el cambio $u = ax+by$ transforma la ecuación (2.138) en una ecuación de variable separables.

Ejemplo 2.6.2. Para resolver la ecuación

$$y' = \frac{x+y+4}{x-y-6} \tag{2.139}$$

observamos en primer lugar que las rectas $x+y+4=0$ y $x-y-6=0$ se cortan. Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x+y = -4 \\ x-y = 6 \end{cases}$$

obtenemos que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-2} = 1, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{10}{-2} = -5$$

luego el punto de corte de ambas rectas es el punto $(1, -5)$. Haciendo el cambio de variables

$$u = x-1, \quad v = y+5$$

la ecuación (2.139) se transforma en la ecuación homogénea

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+v}{u-v}.$$

Para resolver esta ecuación hacemos un nuevo cambio $v = uz$ que transforma la ecuación anterior en la ecuación de variables separables

$$u\frac{dz}{du} + z = \frac{z+1}{1-z}$$

que operando queda

$$\frac{1-z}{z^2+1}\frac{dz}{du} = \frac{1}{u}$$

cuya solución es

$$\int \frac{1-z}{z^2+1} dz = \ln|u| + c$$

que integrando da

$$\operatorname{arctg} z - \frac{1}{2}\ln\left|z^2+1\right| = \ln|u| + c.$$

Deshaciendo los cambios llegamos a que la solución general de la ecuación (2.139) es

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y+5}{x-1}\right) = \ln\sqrt{(y+5)^2+(x-1)^2} + c$$

o

$$\frac{y+5}{x-1} = \operatorname{tg}\left[\ln\sqrt{(y+5)^2+(x-1)^2} + c\right].$$

Ejemplo 2.6.3. Consideremos la ecuación

$$y' = \frac{x+y+4}{x+y-6}. \tag{2.140}$$

En este caso, como las rectas $x+y+4=0$ y $x+y-6=0$ son paralelas, hacemos el cambio

$$u = x + y.$$

Con este cambio la ecuación (2.140) se transforma en la ecuación de variables separables

$$u' = \frac{u+4}{u-6} + 1 = 2\frac{u-1}{u-6} \tag{2.141}$$

que pasando todos los términos en u al otro miembro queda

$$\frac{u-6}{u-1}u' = 2.$$

Integrando en ambos lados se llega a que

$$\int \frac{u-6}{u-1}\,du = \int 2\,dx = 2x + c$$

luego

$$u - 5\ln|u-1| = 2x + c$$

que deshaciendo el cambio nos da la solución de la ecuación (2.140):

$$y - 5 = 5\ln|x+y+1| + c. \tag{2.142}$$

Obsérvese que el término de la derecha de la ecuación (2.141) se anula cuando $u=1$ por lo que dicha ecuación también tiene como solución $u \equiv 1$. Al deshacer el cambio obtenemos una nueva solución, $y = 1 - x$, de la ecuación (2.140). Esta es una solución singular porque no se obtiene de la familia uniparamétrica de soluciones (2.142) para ningún valor de c.

2.6.3. Ecuación de Bernoulli

La ecuación diferencial

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \tag{2.143}$$

donde p y q son funciones continuas y n es un número real se denomina **ecuación de Bernoulli**.

Si $n = 0$ ó $n = 1$ la ecuación (2.143) es una ecuación lineal, homogénea en el segundo caso, que se resuelve empleando los métodos vistos en la sección 2.5. Para cualquier otro valor de n, se hace el cambio de variable

$$u = y^{1-n}.$$

Con este cambio

$$u' = (1-n)y^{-n}y'$$

con lo que multiplicando ambos miembros de la ecuación (2.143) por y^{-n} esta se transforma en

$$\frac{1}{1-n}u' + p(x)u = q(x) \tag{2.144}$$

que es una ecuación lineal.

Obsérvese que si $n > 0$ la función $y \equiv 0$ es una solución de la ecuación (2.143). Esta solución, en general, no aparece al resolver la ecuación (2.144) ya que al multiplicar la ecuación de Bernoulli por y^n se pierde.

Ejemplo 2.6.4. La ecuación

$$xy' + y = y^2 \ln x \tag{2.145}$$

se transforma, dividiendo sus dos miembros por x, en una ecuación de Bernoulli, con

$$p(x) = \frac{1}{x}, \quad q(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{y} \quad n = 2.$$

Haciendo el cambio $u = y^{-1}$ la ecuación (2.145) se transforma en la ecuación lineal

$$-u' + \frac{1}{x}u = \frac{\ln x}{x}. \tag{2.146}$$

La solución de la ecuación homogénea asociada es

$$c \exp\left(\int \frac{dx}{x}\right) = c|x|.$$

La solución general será entonces de la forma

$$u(x) = c(x)x.$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación (2.146) se tiene que

$$-c'(x)x - c(x) + c(x) = c'(x) = \frac{\ln x}{x}$$

y, por tanto, que

$$c(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c.$$

Sustituyendo este valor en u y deshaciendo el cambio se tiene que la solución general de la ecuación (2.145) es

$$y(x) = \frac{1}{\ln x + 1 + cx}$$

junto con la solución $y \equiv 0$.

2.6.4. Ecuación de Riccati

La **ecuación de Riccati** es la ecuación

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2. \tag{2.147}$$

En general, esta ecuación no puede resolverse por métodos elementales. Sin embargo, si se conoce una solución particular sí es posible resolverla.

Si y_1 es la solución que se conoce de la ecuación, se hace el cambio $z = y - y_1$. Con ese cambio la ecuación queda

$$z' + y_1' = p(x) + q(x)(z + y_1) + r(x)(z^2 + 2zy_1 + y_1^2)$$

y simplificando, teniendo en cuenta que y_1 es solución de (2.147),

$$z' = [q(x) + 2r(x)y_1]\,z + r(x)z^2$$

que es una ecuación de Bernoulli.

Ejemplo 2.6.5. La ecuación

$$y' + y^2 = x^2 - 2x \tag{2.148}$$

es una ecuación de Riccati. Sumando 1 a ambos términos de la ecuación esta queda

$$y' + y^2 + 1 = (x - 1)^2$$

que tiene como solución obvia $y_1(x) = 1-x$. Si hacemos el cambio $z = y+x-1$ y sustituimos en el primer término de la ecuación este se convierte en

$$z' - 1 + (z + 1 - x)^2 + 1 = z' + z^2 + (1 - x)^2 + 2(1 - x)$$

y, por tanto, la ecuación se transforma en la ecuación de Bernoulli

$$z' - 2(x-1)z + z^2 = 0.$$

Estas a su vez, mediante el cambio $u = z^{-1}$ se transforma en la ecuación lineal

$$u' + 2(x-1)u - 1 = 0. \tag{2.149}$$

La solución general de la ecuación linel homogénea asociada a esta ecuación es

$$u_h(x) = c\int e^{-2(x-1)} = ce^{-(x-1)^2}.$$

Aplicando el método de variación de las constantes, sabemos que la solución de la ecuación (2.149) es de la forma

$$u(x) = c(x)e^{-(x-1)^2}.$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación (2.149) se tiene que

$$c'(x)e^{-(x-1)^2} + c(x)(-2(x-1))e^{-(x-1)^2} + 2(x-1)c(x)e^{-(x-1)^2} - 1 = 0$$

luego

$$c'(x) = e^{(x-1)^2}$$

y

$$c(x) = \int e^{(x-1)^2}dx + c.$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación (2.149) es

$$u(x) = e^{-(x-1)^2}\left(\int e^{(x-1)^2}dx + c\right).$$

Deshaciendo los cambios se llega a la solución de la ecuación (2.148)

$$y(x) = 1 - x + \frac{e^{x^2-2x}}{\int e^{(x-1)^2}dx + c}.$$

La ecuación de Riccati puede transformarse, mediante un cambio de variables, en una ecuación lineal de segundo orden. Para ver esto, consideremos una función z que satisfaga la ecuación

$$z'(x) = -r(x)y(x)z(x).$$

Derivando esta expresión se tiene que

$$z'' = -(r'yz + ry'z + ryz')$$

luego

$$rzy' = -(z'' + r'yz + ryz') = -z'' + \frac{r'z'}{r} - ryz'.$$

Multiplicando la ecuación de Riccati por la función rz se tiene que

$$rzy' = prz + qrzy + r^2zy^2 = prz - qz' - ryz'$$

luego

$$-z'' + \frac{r'z'}{r} = prz - qz'$$

o

$$z'' - \left(\frac{r'}{r} + q\right) z' + prz = 0. \tag{2.150}$$

Esta es una ecuación lineal de segundo orden homogénea cuyo estudio y, en su caso, resolución veremos en capítulos posteriores.

2.7. Ecuaciones en forma no estándar

Hasta ahora hemos estudiado distintos tipos de ecuaciones que o bien estaban expresadas en forma normal o eran fácilmente reducibles a ella. En esta sección vamos a ver algunos ejemplos de ecuaciones que no vienen expresadas en forma normal.

2.7.1. Ecuaciones de grado mayor que 1

Si la ecuación es de grado mayor que 1 y es posible despejar y' el problema se reduce a resolver las correspondientes ecuaciones de grado uno.

Ejemplo 2.7.1. La ecuación

$$(y')^2 = 4y \tag{2.151}$$

es equivalente a las dos ecuaciones de variables separables

$$y' = 2y^{1/2} \quad \text{e} \quad y' = -2y^{1/2}, \tag{2.152}$$

que tienen como soluciones, además de la función $y \equiv 0$, las funciones

$$y(x) = (x + c)^2.$$

2.7.2. Ecuaciones de las formas $F(y, y') = 0$ y $F(x, y') = 0$

Si la ecuación es de la forma $F(y, y') = 0$ o $F(x, y') = 0$ y se pueden despejar y en el primer caso o x en el segundo, se puede intentar hacer el cambio $p = y'$ para obtener una ecuación en la variable p.

Ejemplo 2.7.2. Consideremos la ecuación

$$x = \ln y' + \operatorname{sen} y'. \tag{2.153}$$

Como esta ecuación es de la forma $F(x, y') = 0$ y la variable x se puede despejar, de hecho ya está despejada, se puede aplicar el método que acabamos de describir. Haciendo el cambio $p = y'$ se tiene que

$$x = \ln p + \operatorname{sen} p$$

y derivando con respecto a p

$$\frac{dx}{dp} = \frac{1}{p} + \cos p.$$

Por otro lado como, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dp} = p\frac{dx}{dp}$$

la ecuación precedente se transforma en

$$\frac{dy}{dp} = 1 + p\cos p$$

que tiene como solución

$$y(p) = p + \int p\cos p\, dp + c = p + p\operatorname{sen} p + \cos p + c$$

Por lo tanto la solución de (2.153) dada en forma paramétrica es

$$\begin{cases} x(p) = \ln p + \operatorname{sen} p \\ y(p) = p + p\operatorname{sen} p + \cos p + c \end{cases}$$

Si no es posible, o no es sencillo, despejar la correspondiente variable, x si la ecuación es de la forma $F(x, y') = 0$ e y si es de la forma $F(y, y') = 0$, se puede intentar, una vez hecho el cambio $y' = p$, parametrizar dicha variable y p.

Ejemplo 2.7.3. Consideremos la ecuación

$$y^{2/3} + (y')^{2/3} = 1. \tag{2.154}$$

En este caso la función es del tipo $F(y, y') = 0$. Haciendo el cambio $y' = p$ la ecuación se transforma en

$$y^{2/3} + p^{2/3} = 1$$

que es una curva en las variables y y p que se puede parametrizar

$$y = \cos^3 t, \qquad p = \operatorname{sen}^3 t. \tag{2.155}$$

Derivando y con respecto del parámetro, t en este caso, queda

$$\frac{dy}{dt} = -3\cos^2 t \operatorname{sen} t$$

y como, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = p\frac{dx}{dt}$$

resulta que, si $p \neq 0$,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{p}\frac{dy}{dt} = \frac{-3\cos^2 t \operatorname{sen} t}{\operatorname{sen}^3 t} = -3\frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t}$$

luego

$$x(t) = 3(\operatorname{cotg} t + t) + c$$

y la familia de curvas paramétricas

$$\begin{cases} x(t) = 3(\operatorname{cotg} t + t) + c \\ y(t) = \cos^3 t \end{cases}$$

son soluciones de (2.155). Además de estas soluciones, al considerar el caso $p = 0$ obtenemos que las funciones $y \equiv \pm 1$ son dos soluciones singulares de la ecuación (2.154).

2.7.3. Ecuación de Lagrange

El procedimiento anterior nos puede servir también para resolver otras ecuaciones diferenciales dadas en forma no normal aunque no sean exactamente de los dos tipos anteriores.

Este es el caso de la ecuación diferencial

$$y = xa(y') + b(y') \tag{2.156}$$

donde a y b son funciones derivables. Esta es una ecuación clásica que se conoce con el nombre de **ecuación de Lagrange**.

Haciendo como antes el cambio $y' = p$ la ecuación de Lagrange queda

$$y = xa(p) + b(p)$$

y derivando con respecto de x se tiene que

$$p = a(p) + xa'(p)\frac{dp}{dx} + b'(p)\frac{dp}{dx} = a(p) + \left(xa'(p) + b'(p)\right)\frac{dp}{dx}. \tag{2.157}$$

Si a no es la identidad, invirtiendo, es decir considerando x como función de p, queda una ecuación diferencial lineal en x

$$\frac{dx}{dp} - \frac{a'(p)}{p - a(p)}x = \frac{b'(p)}{p - a(p)}.$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos como antes una solución paramétrica de la ecuación de Lagrange. Además para aquellos valores de p para los que se verifique que $a(p) = p$ se obtienen las soluciones singulares $y(x) = px + b(p)$.

Ejemplo 2.7.4. La ecuación

$$y = x(1 + y') + (y')^2 \tag{2.158}$$

es una ecuación de Lagrange.

Haciendo el cambio $y' = p$ y repitiendo el proceso de más arriba llegamos a la ecuación lineal

$$\frac{dx}{dp} + x = -2p. \tag{2.159}$$

La solución de la ecuación homogénea asociada es ke^{-p}. Aplicando el método de variación de las constantes se tiene que la solución general de la ecuación (2.159) es de la forma

$$x(p) = k(p)e^{-p}$$

que derivando y sustituyendo en (2.159) nos da que

$$k'(p)e^{-p} - k(p)e^{-p} + k(p)e^{-p} = k'(p)e^{-p} = -2p$$

luego

$$k(p) = -2\int pe^{p}dp = -2\left(pe^{p} - e^{p}\right) + c$$

y

$$x(p) = -2(p - 1) + ce^{-p}.$$

En consecuencia, la solución de (2.158), dada en forma paramétrica, es

$$\begin{cases} x(p) = 2(1 - p) + ce^{-p} \\ y(p) = \left(2(1 - p) + ce^{-p}\right)(1 + p) + p^2 \end{cases}$$

2.7.4. Ecuacion de Clairaut

En el caso particular en que a es la identidad la ecuación de Lagrange queda

$$y = xy' + b(y'). \tag{2.160}$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de **ecuación de Clairaut**.

En este caso haciendo el cambio $y' = p$ y derivando queda

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + b'(p)\frac{dp}{dx}$$

o

$$\big(x + b'(p)\big)\frac{dp}{dx} = 0.$$

Esta ecuación se satisface si

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

es decir $p \equiv c$, o si

$$x + b'(p) = 0.$$

De la primera condición se obtiene la familias de soluciones

$$y(x) = cx + b(c)$$

y de la segunda, la solución singular que se obtiene de las ecuaciones

$$\begin{cases} x + b'(p) = 0 \\ y = xp + b(p) \end{cases}$$

Ejemplo 2.7.5. La ecuación

$$y = xy' + \frac{1}{(y')^2} \tag{2.161}$$

es una ecuación de Clairaut. Según hemos visto más arriba sus soluciones son la familia uniparamétrica

$$y(x) = cx + \frac{1}{c^2}$$

y la solución singular que se obtiene de las ecuaciones

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{p^3} \\ y = xp + \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{xp^3 + 1}{p^2} \end{cases}$$

que es

$$y = 3\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}.$$

2.8. Reducción del orden

Como ya hemos comentado con anterioridad no son muchas las ecuaciones diferenciales que pueden ser resueltas de forma analítica. No obstante, hemos visto en las secciones precedentes de este capítulo algunos métodos que sirven para resolver ciertas ecuaciones diferenciales de primer orden. Desgraciadamente para las ecuaciones de orden superior no existen demasiados métodos de resolución. En estos casos una de las estrategias que se puede emplear para abordar la resolución de una ecuación dada es intentar reducir su orden. Si aplicando este procedimiento, en una o más etapas, se consigue reducir la ecuación a una o varias ecuaciones de primer orden es posible que lleguemos a ecuaciones que sepamos resolver.

En esta sección vamos a ver algunos métodos que nos permiten reducir el orden de una ecuación diferencial.

2.8.1. Ecuaciones de la forma $F(x, y^{(n)}, \ldots, y^{(n+k)}) = 0$

Si tenemos una ecuación diferencial de la forma

$$F(x, y^{(n)}, \ldots, y^{(n+k)}) = 0,$$

el cambio $z = y^{(n)}$ la convierte en

$$F(x, z, \cdots, z^{(k)}) = 0$$

que es una ecuación de orden k. Si somos capaces de resolver esta última ecuación, integrando obtendremos las soluciones de la ecuación inicial.

Ejemplo 2.8.1. La ecuación

$$y'' - xy''' + (y''')^3 = 0 \tag{2.162}$$

mediante el cambio $y'' = z$ se transforma en la ecuación

$$z - xz' + (z')^3 = 0 \tag{2.163}$$

que es una ecuación de Clairaut. Haciendo ahora el cambio $z' = p$ y derivando la ecuación anterior se llega a la ecuación

$$p - p - x\frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx} = \left(3p^2 - x\right)\frac{dp}{dx} = 0. \tag{2.164}$$

Soluciones de esta ecuación son las funciones $p \equiv c$, que nos dan la familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación (2.163)

$$z = cx - c^3$$

con $c \in \mathbb{R}$. Además la ecuación (2.164) también se verifica si

$$3p^2 - x = 0.$$

De aquí obtenemos las soluciones singulares de (2.163)

$$\begin{cases} x = 3p^2 \\ z = px - p^3 \end{cases}$$

que despejando el parámetro p nos da las dos soluciones

$$z = \pm 2\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Por último, como $y'' = z$, integrando dos veces obtenemos las soluciones de la ecuación (2.162)

$$y(x) = c\frac{x^3}{6} - c^3\frac{x^2}{2} + c_1x + c_2$$

e

$$y(x) = \pm\frac{8}{105\sqrt{3}}x^{\frac{7}{2}} + c_1x + c_2.$$

Ejemplo 2.8.2. La ecuación

$$y''y''' = \sqrt{1 + (y'')^2} \tag{2.165}$$

se transforma, mediante el cambio $z = y''$, en la ecuación

$$zz' = \sqrt{1 + z^2}$$

que es de variables separables. Su solución satisface la relación

$$\sqrt{1 + z^2} = x + c$$

o

$$z(x) = \pm\sqrt{(x + c)^2 - 1}.$$

Integrando dos veces se obtiene

$$y(x) =$$
$$\pm\frac{1}{2}\left[\sqrt{(x+c)^2 - 1}\,\frac{(x+c)^2 + 2}{3} - (x+c)\ln(x+c+\sqrt{(x+c)^2 - 1})\right] + c_1x + c_2.$$

2.8.2. Ausencia de la variable independiente

Si la ecuación diferencial es de la forma

$$F(y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0,$$

el cambio $z = y'$ la convierte, haciendo uso de la regla de la cadena, en una nueva ecuación de orden $n-1$,

$$G\left(y, z, \frac{dz}{dy}, \cdots, \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

Obsérvese que en esta nueva ecuación la función incógnita es z y la variable dependiente y.

Ejemplo 2.8.3. Vamos a aplicar el método anterior para reducir el orden de la ecuación de orden 2

$$2yy'' = (y')^2 + 1.$$

Si ponemos $z = y'$ entonces, aplicando la regla de la cadena,

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}.$$

Sustituyendo en la ecuación queda

$$2yz\frac{dz}{dy} = z^2 + 1$$

o

$$\frac{2z}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{y}\,dy$$

que es una ecuación orden 1 de variables separables. Integrando se obtiene que

$$z^2 + 1 = c_1 y$$

y, por tanto,

$$z = \pm\sqrt{c_1 y - 1}.$$

Deshaciendo el cambio tenemos dos ecuaciones

$$y' = \pm\sqrt{c_1 y - 1}$$

que nuevamente son de variables separables. Integrando se obtiene que

$$2\sqrt{c_1 y - 1} = \pm c_1 x + c_2$$

y despejando se llega a que

$$y(x) = \frac{1}{c_1}\left[\left(\frac{\pm c_1 x + c_2}{2}\right)^2 + 1\right]$$

con c_1 y c_2 constantes reales, $c_1 \neq 0$.

2.9. Ejercicios

2.9.1. Resuelve las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $4yy' + x = 0$.
b) $x\,dx + y\,dy = 0$.
c) $y' \cos x = (\operatorname{sen} x + x \sec x) \operatorname{cotg} y$.
d) $y' \sqrt{x^2+1} = xe^{-y}$.
e) $(xy^2 - y^2 + x - 1) + (x^2y + x^2 - 2xy - 2x + 2y + 2)y' = 0$.
f) $y' = (x-y)^2 + 1$.

2.9.2. Resuelve los siguientes problemas de valores iniciales:

a) $y' - y = y^2, \quad y(0) = 0$.
b) $y' = \dfrac{y^2+1}{x^2}, \quad y(1) = \sqrt{3}$.
c) $\dfrac{(u^2+1)}{y}\dfrac{dy}{du} = u, \quad y(0) = 2$.

2.9.3. Dados $m, n, p \in \mathbb{N}$ cualesquiera, integra la ecuación diferencial

$$y' + 1 = \frac{(x+y)^m}{(x+y)^n + (x+y)^p}.$$

2.9.4. Resuelve la ecuación diferencial

$$x^2y^2 + 1 + 2x^2y' = 0$$

mediante la sustitución $xy = z$.

2.9.5. Integra la ecuación diferencial

$$(e^x + 1)yy' = e^x$$

y encuentra la solución particular que pasa por $(0,0)$.

2.9.6. Halla la solución particular de la ecuación diferencial

$$y' \operatorname{sen} x = y \log y$$

que satisface la condición inicial $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$.

2.9.7. Un coche de masa m viaja a una velocidad v_0 cuando de repente tiene que frenar. Los frenos ejercen una fuerza constante k hasta que el coche se para. ¿Cuánto tarda el coche en detenerse y qué distancia recorre antes de hacerlo?

2.9.8. Demuestra que la curva plana que posee la propiedad de que todas sus normales pasan por un punto fijo, es una circunferencia.

2.9.9. Halla la curva para la cual la pendiente de la tangente en cualquier punto es n veces mayor que la pendiente de la recta que une ese punto con el origen de coordenadas.

2.9.10. Inicialmente un cultivo tiene un número B_0 de bacterias. Al cabo de una hora se determina que el número de bacterias es $\frac{3}{2}B_0$. Si la razón de crecimiento es proporcional al número de bacterias $B(t)$ presentes en el tiempo t, calcula el tiempo necesario para que se triplique el número de bacterias.

2.9.11. La población de rebecos de un parque nacional era de 2900 en 1985 y 3700 en 1995. Los conservadores del parque quieren hacer una estimación de la población de rebecos en el año 2015, supuesto que la población se rige por el modelo de crecimiento maltusiano. ¿Cuál será dicha estimación?

Conservadores expertos consideran, dado el tamaño del parque y su situación, que la capacidad de soporte de la población de rebecos es de 8000 individuos. Si suponen que la población se rige por el modelo logístico de crecimiento ¿cuál será su estimación de la población en 2015?

2.9.12. Una muestra de madera de un yacimiento arqueológico contiene, por unidad de masa, un 75 % de la cantidad de carbono-14 que contiene una trozo de madera viva. ¿Cuál es la edad aproximada de la muestra de madera?

2.9.13. El potasio-40 es un isótopo radiactivo cuya vida media es de 1250 millones de años y que al desintegrarse se convierte en un átomo de argón-40 y otras partículas. Al analizar una muestra de una roca se observó que contenía 8 veces más átomos de potasio-40 que de argón-40. Supuesto que el argón-40 únicamente provenía de la desintegración del potasio-40 ¿cuánto tiempo había pasado desde que la roca sólo contenía potasio-40 hasta que se realizó el análisis?

2.9.14. La temperatura T de un cuerpo rodeado por aire a temperatura T_0 varía de modo que el ritmo de variación de su temperatura es proporcional a la diferencia de temperaturas $T - T_0$ (ley del enfriamiento de Newton). Un cuerpo que inicialmente está a 120°C se pone en contacto con aire a 20°C. Al cabo de una hora, su temperatura es de 70°C. ¿Cuánto tiempo más tiene que transcurrir para que la temperatura del cuerpo baje a 40°C?

2.9.15. Un estudiante invita a sus amigos a ver un partido de fútbol en su casa. Quiere tener unas latas de cerveza listas para beberlas con sus amigos cuando estos lleguen a las 8 de la tarde. De acuerdo con su gusto la cerveza se ha de tomar a 10°C. Su experiencia le dice que si la temperatura de las latas cuando las introduce en la nevera es de 27°C y mantiene esta a una temperatura constante de 4°C, al cabo de una hora las cervezas se encuentran a 16°C. ¿A qué hora ha de introducir las cervezas en la nevera para garantizar que estén listas cuando lleguen sus amigos?

2.9.16. Resuelve las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $y' = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

b) $4y(x^2+3y^2)\,dx = x(x^2-6y^2)\,dy$.

c) $(x^2+y^2)\,dx = x(x+y)\,dy$.

2.9.17. Integra la ecuación diferencial

$$(1-x^2y^2)y' = 2xy^3$$

mediante un cambio de variable del tipo $y = z^\alpha$ que la transforme en homogénea.

2.9.18. Halla las curvas que poseen la propiedad de que la distancia del origen de coordenadas a cualquier recta tangente es igual al valor absoluto de la abscisa del punto de tangencia.

2.9.19. Resuelve las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $e^{-y} - (2y + xe^{-y})\,y' = 0$.

b) $(6xy^2+3x^2) + (6x^2y+4y^3)\,y' = 0$.

c) $(xy^2-1) + y(x^2+3)\,y' = 0$.

d) $\left(2x+\dfrac{1}{y}\right) + \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}\right) y' = 0$.

e) $(\operatorname{sen} xy + xy\cos xy) + x^2\cos(xy)\,y' = 0$.

f) $(1-xy) + (1-x^2)\,y' = 0$.

g) $(y^2+x) - 2xy\,y' = 0$.

h) $2xy\log y + (x^2+y^2\sqrt{y^2+1})\,y' = 0$.

2.9.20. Integra la ecuación diferencial

$$(x^2-y^2+1)\,dx + (x^2-y^2-1)\,dy = 0$$

sabiendo que tiene un factor integrante que depende de una combinación lineal de x e y.

2.9.21. Resuelve las ecuaciones diferenciales siguientes si su factor integrante es de la forma $\mu(x,y) = \varphi(x+y^2)$:

a) $y^2+3x+2y+(4xy+5y^2+x)\,y' = 0$.

b) $3y^2-x+(2y^3-6xy)\,y' = 0$.

2.9.22. Integra la ecuación diferencial

$$y^2 - xy + x^2 y' = 0$$

sabiendo que existe un factor integrante que es función de xy^2.

2.9.23. Encuentra un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = \varphi(y^2 - x^2)$ de la ecuación diferencial

$$x^2 + y^2 + 1 - 2xy\, y' = 0$$

y resuélvela.

2.9.24. Dada la ecuación diferencial

$$y - xy^2 \log x + xy' = 0,$$

encuentra un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = \varphi(xy)$ y resuélvela.

2.9.25. Demuestra que toda ecuación diferencial de la forma

$$yf(xy)\, dx + xg(xy)\, dy = 0$$

admite como factor integrante a

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xy\,(f(xy) - g(xy))}.$$

Aplica este resultado a la resolución de la ecuación

$$x^3y^4\, dx - (x^2y - x^4y^3)\, dy = 0.$$

2.9.26. Halla un factor integrante de la ecuación diferencial

$$x^2 - y^2 - 1 + 2xyy' = 0$$

sabiendo que admite como solución general a la familia de curvas

$$x^2 + y^2 - cx + 1 = 0.$$

2.9.27. Sean f y g dos funciones. Demuestra que la ecuación diferencial

$$f(x)y - g(x)y^n + y' = 0$$

admite un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = X(x)Y(y)$. Halla las funciones X e Y.

2.9.28. Demuestra que la función

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xy(2x+y)}$$

es un factor integrante de la ecuación diferencial

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)\, y' = 0.$$

Halla otro factor integrante y resuelve la ecuación.

2.9.29. Resuelve las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

b) $y' + y \operatorname{tg} x = \sec^2 x$

c) $xy' + (1-x)y = xe^x$

d) $y' = \dfrac{1}{e^y - x}$

e) $y' = \dfrac{1}{x\cos y + \operatorname{sen} 2y}$

f) $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$

2.9.30. Integra la ecuación diferencial

$$y' + \frac{y}{x} = 3\cos 2x$$

buscando un factor integrante.

2.9.31. Resuelve la ecuación diferencial

$$y' = y \operatorname{tg} x + \cos x$$

por el método de variación de las constantes.

2.9.32. Halla la solución particular de la ecuación diferencial

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x^2}$$

que satisface la condición inicial $y(\pi) = 0$.

2.9.33. Halla la familia de funciones tales que el área del trapecio limitado por los ejes de coordenadas, la recta tangente a la gráfica de la función en un punto y la recta paralela al eje de ordenadas que pasa por el punto de tangencia sea constante e igual a a^2.

2.9.34. Dado el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' - y = 1 + 3\operatorname{sen} x \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

encuentra el valor de y_0 para el que la solución permanece finita cuando x tiende a ∞.

2.9.35. Dada la ecuación diferencial

$$2x^2y' - xy = 2x\cos x - 3\operatorname{sen} x, \qquad x > 0,$$

estudia el comportamiento de las soluciones cuando x tiende 0 y cuando x tiende a ∞. ¿Hay alguna solución y tal que

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0?$$

2.9.36. Dadas y_1, y_2 e y_3 soluciones particulares de una ecuación lineal

$$y' + a(x)y = b(x),$$

demuestra que la expresión

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}$$

es constante.

2.9.37. Un depósito contiene sal disuelta en 1200 litros de agua con una concentración de 24 g/l. Se bombea en el depósito agua con sal con una concentración de 48 g/l a una velocidad de 8 l/min. El agua sale del depósito por un grifo a la misma velocidad.

a) Determina la cantidad y la concentración de sal en el depósito como función del tiempo.

b) ¿Cuanto tiempo tardará la concentración de sal en llegar hasta 26 g/l?

2.9.38. En una empresa hay empleadas en este momento 6000 personas de las cuales el 25 % son mujeres. Cada semana abandonan la empresa de forma aleatoria 100 personas. Si sabemos que cada semana se contratan sólo 50 personas, la mitad de ellas mujeres, para sustituir a las personas que se han ido, ¿cuántos trabajadores tendrá la empresa dentro de 40 semanas y cuál será el porcentaje de mujeres en ese momento?

2.9.39. A las 10 de la noche de un animado viernes por la noche, un local de 20 metros de largo por 10 de ancho por 3 de alto se encuentra lleno de clientes. Muchos de estos clientes son fumadores, de manera que el aire del local se va llenando del humo de los cigarrillos que contiene un 4 % de monóxido de carbono a una velocidad de 0,004 m^3 por minuto. Supongamos que esta velocidad no varía significativamente en toda la noche. Antes de las 10 no había ningún rastro de monóxido de carbono en el local. El local está dotado con un buen sistema de renovación de aire que hace que que el humo se mezcle de forma uniforme con el aire y fluya hacia el exterior a una velocidad de 0,04 m^3 por minuto.

Según las autoridades sanitarias una exposición prolongada a una concentración de monóxido de carbono superior o igual al 0,012 % se considera peligrosa para la salud. Sabiendo que el local cierra a las 5 de la madrugada ¿se alcanzará la concentración crítica de 0,012 % de monóxido de carbono en el aire antes de la hora de cierre?

2.9.40. Resuelve las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $(3y - x)y' = 3x - y - 4$.
b) $(2x - 4y + 5)y' = x - 2y + 3$.
c) $(x + y + 1)\, dx + (2x + 2y - 1)\, dy = 0$.
d) $y' = (x + y)^2$.
e) $x^2 y' = (2x - y + 1)^2$.
f) $(x - y)^2 y' = (x - y + 1)^2$.

2.9.41. Resuelve las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $3xy' - 2y = x^3 y^{-2}$.
b) $y = xy' + (y')^2$.
c) $y = 2xy' + \operatorname{sen} y'$.
d) $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$.
e) $y = 2xy' + \log y'$.
f) $2y' \operatorname{sen} x + y \cos x = y^3 (x \cos x - \operatorname{sen} x)$.
g) $2y = xy' + y' \log y'$.
h) $y = (y')^2 e^{y'}$.
i) $y^4 - (y')^4 - y(y')^2 = 0$.
j) $y = (y')^2 + 2(y')^3$.
k) $x = (y')^3 + y'$.

2.9.42. Integra la ecuación diferencial

$$xy' = y + \frac{2x}{x^4 - 1}(y^2 - x^2)$$

sabiendo que admite soluciones particulares de la forma $y = ax + b$.

2.9.43. Halla la curva para la cual el segmento de la tangente comprendido entre los ejes coordenados tiene una longitud constante a.

2.9.44. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden y de grado 2 respecto a y':

a) $y(y')^2 + (x - y)y' - x = 0$.
b) $(y')^2 - (2x + y)y' + x^2 + xy = 0$.
c) $x(y')^2 + 2xy - y = 0$.
d) $4(y')^2 - 9x = 0$.
e) $(y')^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$.
f) $x^2(y')^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$.
g) $y = x + y' - 3(y')^2$.
h) $y = y'x - 2(y')^2$.

2.9.45. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y''' = x \ln x$.
b) $xy'' = y' + (y')^2$.
c) $yy'' + (y')^2 = 0$.
d) $xy^{(4)} - y''' = 0$.

2.10. Ejercicios de controles y exámenes

2.10.1. Controles

2.10.1. a) Resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y^2.$$

b) Estudia si la ecuación precedente tiene soluciones singulares y, en caso afirmativo, indica cuáles son.

c) Estudia para qué puntos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = y^2, \qquad y(a) = b$$

tiene una única solución.

2.10.2. Halla la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} xy' = y^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

e indica el intervalo en que está definida.

2.10.3. Demuestra que la ecuación

$$y' = x^{n-1} f(y + ax^n)$$

se transforma en una ecuación de variables separables haciendo el cambio

$$u(x) = y(x) + ax^n.$$

Utiliza el método anterior para resolver la ecuación

$$y' = 2x(y + x^2)^2.$$

2.10.4. a) Resuelve la ecuación diferencial

$$y^3 \frac{dy}{dx} = (y^4 + 1) \cos x.$$

b) Resuelve el problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cos^2 y, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

2.10.5. a) Resuelve la ecuación

$$y' = \frac{x}{y+x} + \frac{y}{x}$$

y halla la solución que satisface la condición

$$\lim_{x\to 1^+} y(x) = -1.$$

b) Halla la solución del problema de valor inicial

$$y' + xy = e^{-x^2/2}, \qquad y(0) = 1.$$

2.10.6. a) Demuestra que la ecuación diferencial

$$(x - y^2) + (2xy + x^2y^3)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.166}$$

no es exacta pero tiene un factor integrante dependiente sólo de x. Calcula ese factor integrante.

b) Halla la solución de la ecuación (2.166).

2.10.7. Halla la solución del problema de valor inicial

$$y' = y \operatorname{sen} x + 2xe^{-\cos x}, \qquad y(0) = 1.$$

2.10.8. Un depósito con una capacidad de 80 litros contiene 40 litros de agua con 1,5 kg de sal disuelta. El depósito está abierto en su parte superior. En el depósito entra agua con una concentración de 0,125 kg de sal por litro a una velocidad de 16 litros por minuto. La mezcla sale del depósito a una velocidad de 8 litros por minuto. ¿En qué momento la disolución empezará a rebosar por la parte superior del depósito y cuál será la cantidad de sal que habrá en el depósito en ese momento?

2.10.9. a) Halla la solución general de la ecuación diferencial:

$$2y^2 + 3x + 2xyy' = 0$$

b) Halla la solución del problema de valor inicial

$$y' = y(xy^3 - 1), \qquad y(0) = y_0$$

cuando $y_0 = \sqrt[3]{3}$ y cuando $y_0 = 0$.

2.10.10. Halla la solución general de la ecuación

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = \frac{1}{x}$$

2.10.11. a) Halla la solución del problema de valor inicial

$$y' = \frac{y^2 + 4x^2}{4xy}, \qquad y(1) = 2$$

b) Resuelve la ecuación

$$y = 2y'x - (y')^2$$

2.10.12. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $(x^2 - yx^2)dy + (y^2 + xy^2)dx = 0$

b) $y' = e^{2x-3y} + 4x^2e^{-3y}$

2.10.13. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y^2}{x} = y$

b) $xy' = y(\log y - \log x + 1)$.

2.10.14. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\left[y\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \cos y\right] + (x + \log x - x \operatorname{sen} y)y' = 0$

b) $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2y\,dy = 0$.

2.10.15. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x + y) + \cos(x + y)$

b) $y' = \dfrac{(x + y - 1)^2}{4(x - 2)^2}$.

2.10.16. Resuelve el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} (3x^2y + 8xy^2) + (x^3 + 8x^2y + 12y^2)y' = 0 \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

2.10.17. Resuelve la ecuación diferencial

$$(x + x^4 + 2x^2y^2 + y^4)\,dx + y\,dy = 0$$

sabiendo que tiene un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = \varphi(y^2 + x^2)$.

2.10.18. Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \left(\dfrac{e^x}{\cos y} - \operatorname{tg} y\right) + y' = 0 \\ y(0) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

a) Demuestra que la ecuación anterior tiene un factor integrante de la forma $e^{-ax}\cos y$ para algún valor de la constante a. Halla a.

b) Resuelve el problema de valor inicial.

2.10.19. a) Resuelve el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = 1 + x + y + xy \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

b) Resuelve la ecuación diferenecial:

$$y' + y \operatorname{tg} x = 2x + x^2 \operatorname{tg} x.$$

2.10.20. Resuelve la siguiente ecuación diferencial:

$$y' + \frac{y}{2} \operatorname{tg} x = 2y^3 \operatorname{sen} x$$

2.10.21. Una salmuera que contiene 2 kg de sal por litro, fluye hacia el interior de un tanque que está lleno con 500 litros de agua que contienen 50 kg de sal. La salmuera entra en el tanque a una velocidad de 6 l/min. La mezcla, que se mantiene uniforme agitándola, está saliendo del tanque a razón de 5 l/min.

a) Calcula la concentración de sal en el tanque al cabo de 10 minutos.

b) Transcurridos 10 minutos, se presenta una fuga en el tanque que ocasiona que salga de él un litro adicional por minuto. ¿Cuál será la concentración de sal contenida en el tanque al cabo de 20 minutos?

2.10.22. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $xy^2 + (1 - x)y' = 0$

b) $e^{y^2}(x^2 + 2x + 1) + (xy + y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

2.10.23. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $xy - y^2 = x^2 y'$

b) $xe^{y/x} + y = x\dfrac{dy}{dx}$

2.10.24. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\dfrac{2xy}{x^2+1} - 2x - (2 - \log(x^2+1))y' = 0$

b) $e^x(x+1) + (ye^y - xe^x)\dfrac{dy}{dx} = 0$

2.10.25. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\sqrt{x^2 - y^2} + y = xy'$

b) $y + (x\ln(y/x) - 2x)\dfrac{dy}{dx} = 0$

2.10.26. Resuelve el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} (2x + x^2y^3) + (x^3y^2 + 4y^3)y' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2.10.27. Resuelve la ecuación diferencial

$$y + (x^2 + y^2 - x)y' = 0$$

sabiendo que tiene un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = \varphi(x^2 + y^2)$.

2.10.28. Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\sec x}{\operatorname{sen} y} - 1 + y' \operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y = 0 \\ y(0) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

a) Demuestra que la ecuación anterior tiene un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = \operatorname{sen}^b x \operatorname{sen} y$ para algún valor de la constante b. Halla b.

b) Resuelve el problema de valor inicial.

2.10.29. a) Resuelve el problema de valor inicial

$$\begin{cases} xy' - y = x^3 \cos x \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

b) Resuelve la ecuación diferencial:

$$y' + y \operatorname{cotg} x = \cos x$$

2.10.30. Resuelve la siguiente ecuación diferencial:

$$y' - y \operatorname{cotg} x = y^3 \operatorname{cosec} x$$

2.10.31. Dado el problema de valor inicial

$$\begin{cases} 2y' - y = 4\operatorname{sen}(3x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

determina el comportamiento de las soluciones cuando $x \to \infty$ en función del valor y_0.

2.10.32. Resuelve la siguiente ecuación diferencial:

$$y = xy' + \frac{1}{(y')^2}$$

2.10.33. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial:

a) $xe^{2x} - (y^4 + 2y)\dfrac{dy}{dx} = 0, \quad y(0) = -1.$

b) $y' = \dfrac{2(1+x)}{1+y^2}, \quad y(0) = 0.$

2.10.34. De las siguientes ecuaciones diferenciales indica cuál es homogéneas y resuélvela:

a) $(1 + 2x)y' = 3 + \dfrac{y}{x}.$

b) $(2x^2 - 3xy)y' + 3y^2 = x^2 + 2xy.$

c) $y' = \dfrac{x(x^2 + y)}{4y^3}.$

Indica cuál es la solución de la ecuación homogénea que satisface la condición inicial $y(-1) = -1$.

2.10.35. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $x^2y - (x^3 + y^3)y' = 0$

b) $(2x^2y^3 + xy^2 + 3y)\,dx + (2x^3y^2 + x^2y + 3x)\,dy = 0$

2.10.36. Demuestra que la ecuación diferencial

$$(1 + xy)y\,dx + (1 - xy)x\,dy = 0$$

tiene un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = \varphi(xy)$ y resuélvela.

2.10.37. a) La ecuación diferencial

$$\left(4x + 3y^2\right) + 2xyy' = 0$$

tiene un factor integrante de la forma x^n, donde n es un número entero. Halla n y resuelve la ecuación.

b) Resuelve la ecuación diferencial

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+e^{-y}\right)\,dx+\left(\frac{x}{y}\,e^{-y}+x\operatorname{arc\,sen}x\right)\,dy=0,$$

sabiendo que tiene un factor integrante de la forma $\mu(x,y)=X(x)Y(y)$.

2.10.38. Resuelve el problema de valor inicial:

$$\begin{cases}(x^2+1)y'-2xy=(x^4+2x^2+1)\,\cos x\\ y(0)=1\end{cases}$$

2.10.39. a) Resuelve el problema de valor inicial:

$$\begin{cases}xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x},\\ y(0)=0.\end{cases}$$

b) Halla la solución general de la ecuación diferencial:

$$(xy'-1)\ln x=2y.$$

2.10.40. a) Halla la solución general de la ecuación diferencial:

$$y-y'=y^2+xy'.$$

Resuelve el correspondientes problema de valor inicial para la condiciones inicial $y(1)=0$.

b) Halla la solución general de la ecuación diferencial:

$$xy'-y=\ln y'.$$

Resuelve el correspondiente problema de valor inicial para la condición inicial $y(1)=1$.

2.10.41. a) Halla la solución general de la ecuación:

$$xy'-y=x^2\ln x.$$

b) Halla la solución general de la ecuación diferencial

$$3y'+y^2+\frac{2}{x^2}=0$$

sabiendo que admite soluciones particulares de la forma $y=ax^r$.

2.10.42. a) Halla la solución general de la ecuación:

$$2(y')^2(y-xy')=1.$$

Expresa la solución en forma explícita. ¿Tienes soluciones singulares? En caso afirmativo indica cuáles son.

b) Halla la solución general de la ecuación:

$$y=x\left(y'\right)^2-2\left(y'\right)^3.$$

¿Tienes soluciones singulares? En caso afirmativo indica cuáles son.

2.10.2. Exámenes

2.10.43. Resuelve el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} y - 2ye^{-x} \operatorname{sen} x + \big(\cos y + 2e^{-x} \cos x\big)\, y' = 0 \\ y(0) = \pi \end{cases}$$

2.10.44. Se bombea cerveza con un contenido del 6 % de alcohol por litro en un tanque que contiene 1200 litros de cerveza con una proporción de alcohol del 3 %. La cerveza entra en el tanque con una velocidad de 12 litros por minuto y una vez bien removida la mezcla sale a la misma velocidad.

a) ¿Cuántos litros de alcohol hay en el tanque en el instante t ($t > 0$)?

b) ¿Cuál es el porcentaje de alcohol en el tanque cuando $t \to \infty$?

2.10.45. Resuelve la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1 - x^2} y = x\sqrt{y}.$$

2.10.46. Justo antes del mediodía el cuerpo de una persona fue hallado, aparentemente víctima de un homicidio, en un cuarto acondicionado para mantener una temperatura constante de 21°C. Al mediodía la temperatura del cuerpo era 26,6°C y a la 1 de la tarde 23,8°C. Si se supone que la temperatura del cuerpo en el momento del óbito era de 37°C y que se enfrió de acuerdo con la ley de Newton. ¿Cuál fue la hora del crimen?

2.10.47. Se considera la ecuación diferencial:

$$y' + \frac{2}{x} y - y^2 = -\frac{2}{x^2}, \qquad x > 0.$$

a) Demuestra que la ecuación posee una solución de la forma $y(x) = ax^r$.

b) Halla la solución general de la ecuación.

2.10.48. Resuelve el problema de valor inicial:

$$\frac{2(1 + x)^2 - y^2}{(1 + x)} + 2(1 + x + y)y' = 0, \qquad y(0) = 2.$$

2.10.49. Halla la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1 - x^2} y = x\sqrt{y}.$$

en el intervalo $-1 < x < 1$.

2.10.50. Halla la solución general de la ecuación diferencial:

$$y^2 dx + (e^x - y)\, dy = 0$$

2.10.51. a) Halla la solución general de la ecuación diferencial

$$(y' + 1) \ln \frac{y + x}{x + 3} = \frac{y + x}{x + 3}.$$

b) Halla las ecuaciones de las curvas planas que pasan por el punto $(1, 1)$ y que tienen la propiedad de que la recta tangente por cada uno de sus puntos forma con el segmento que une el origen con el punto de tangencia y el eje y un triángulo de área $\frac{1}{2}$.

2.10.52. Para cada uno de los dos problemas de valor inicial siguientes:

$$(*)\ (1 + x^5)yy' = x^4, \quad y(x_0) = y_0; \qquad (**)\ xy' = \sqrt{|y|}, \quad y(x_0) = y_0;$$

determina los valores de x_0 e y_0 para los que:

a) el teorema de existencia, teorema de Peano, garantiza que el problema tiene solución;

b) el teorema de existencia y unicidad, teorema de Picard, garantiza que el problema tiene solución única;

c) el problema tiene solución;

d) el problema tiene solución única.

2.10.53. Resuelve la ecuación

$$(x^2 - \operatorname{sen}^2 y) + (x \operatorname{sen} 2y)\, y' = 0.$$

Halla la solución de la ecuación que satisface la condición inicial $y(1) = \pi/4$ y determina el intervalo en el que está definida.

2.10.54. Resuelve la ecuación:

$$2y(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + xy^2 = (1 + x^2)^{3/2}$$

2.10.55. Halla la solución general de la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{x - y}$$

y determina la solución que verifica la condición inicial $y(1) = -1$.

2.10.56. Halla las ecuaciones de las curvas planas que, en cada punto, verifican que la suma de los cuadrados de las inversas de las longitudes de los segmentos determinados por cada uno de los puntos de corte de la tangente a la curva en dicho punto con los ejes coordenados y el origen, vale 1.

2.10.57. Resuelve el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 2x\left(\dfrac{dy}{dx}\right) + 1 = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

2.10.58. Se considera la ecuación diferencial

$$(xy^2 \operatorname{sen}(xy) + y\cos(xy))\, dx + (x^2 y \operatorname{sen}(xy) - x\cos(xy))\, dy = 0.$$

a) Demuestra que la ecuación tiene un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = \varphi(xy)$.

b) Halla la solución general de la ecuación diferencial. ¿Tiene alguna solución singular?

2.10.59. Se considera la ecuación diferencial:

$$y^2 + 2xy - x^2 y' = 0$$

a) Halla la solución general de la ecuación y exprésala en forma explícita. ¿Tiene alguna solución singular?

b) Halla todas las soluciones que verifiquen la condición inicial $y(0) = 0$ e indica, para cada una de ellas, cuál es el mayor intervalo en el que están definidas.

2.10.60. Resuelve la ecuación diferencial:

$$y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$$

CAPÍTULO 3

Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

En el capítulo precedente hemos estudiado diversos métodos de resolución de varios tipos de ecuaciones diferenciales, principalmente de primer orden. En este capítulo vamos a estudiar ecuaciones diferenciales de orden superior.

Como ya hemos indicado anteriormente los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales de orden mayor que uno son escasos. Por este motivo, en general, es extremadamente complicado resolver ecuaciones de este tipo. Sin embargo, hay una clase especial de ecuaciones, las ecuaciones diferenciales lineales, para la que existe una teoría bien desarrollada. Por fortuna muchas de las ecuaciones de orden superior que aparecen en las aplicaciones son de este tipo.

Recordemos que una ecuación diferencial

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

se dice que es **lineal**, si la función F es lineal como función de la función incógnita y de sus derivadas. Una ecuación de este tipo se puede escribir en la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \tag{3.1}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ y b son funciones que sólo dependen de x.

Si el coeficiente de $y^{(n)}$ no se anula, dividiendo, si es preciso, ambos miembros de (3.1) por dicho coeficiente se puede conseguir que el coeficiente de $y^{(n)}$ sea 1, y en ese caso la ecuación se puede expresar en la forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x). \tag{3.2}$$

A esta forma de la ecuación se le denomina **forma normal o estándar** de la ecuación lineal.

Cuando la función b es idénticamente nula la ecuación (3.1) se dice que es una **ecuación diferencial lineal homogénea** de orden n. Si b no es idénticamente nula la ecuación se dice que es **no homogénea**.

Antes de comenzar el estudio de este tipo de ecuaciones es conveniente tener algún resultado que nos garantice que, bajo ciertas condiciones, la ecuación tiene solución.

Teorema 3.0.1 (Teorema de existencia y unicidad). *Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n$ y b funciones continuas en un intervalo I, y supongamos que a_n no se anula en dicho intervalo. Entonces, para todo $x_0 \in I$ e $y_0, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$, existe una única función y que satisface el problema de valores iniciales:*

$$\begin{cases} a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \\ \\ y(x_0) = y_0,\, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

en el intervalo I.

Si la ecuación es homogénea, la función idénticamente nula siempre es una solución. Teniendo esto en cuenta podemos enunciar la siguiente consecuencia del teorema precedente que nos será de gran utilidad en lo que sigue.

Corolario 3.0.2. *Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n$ y b funciones continuas en un intervalo I, y supongamos que a_n no se anula en I. Si y es una solución de la ecuación diferencial lineal homogénea*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

en el intervalo I que, para algún $x_0 \in I$, satisface las condiciones iniciales $y(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$ entonces $y \equiv 0$.

La condición de que a_n no se anule no se puede omitir de las hipótesis del teorema como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.0.3. El problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x^2y'' - 2xy' + 2y = 2 \\ y(0) = a, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

no tiene solución si $a \neq 1$ y tiene infinitas soluciones, las funciones $y(x) = cx^2 + x + 1$, donde c es un número real arbitrario, si $a = 1$.

El ejemplo precedente se puede modificar, por ejemplo dividiendo los dos miembros de la ecuación por x, para dar un ejemplo de que las condiciones sobre la continuidad de los coeficientes y de la función b tampoco pueden ser omitidas de las hipótesis del teorema 3.0.1.

En lo que sigue, salvo mención expresa de lo contrario, siempre consideraremos ecuaciones diferenciales lineales en las que los coeficientes y la función del segundo miembro son funciones continuas. También consideraremos que el coeficiente de la derivada de mayor orden no se anula, por lo que habitualmente expresaremos estas ecuaciones en forma normal.

3.1. Estructura del conjunto de soluciones

Cuando se estudia una ecuación diferencial lineal no homogénea

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x). \tag{3.3}$$

suele ser necesario estudiar también la ecuación lineal homogénea

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \tag{3.4}$$

que se obtiene de (3.3) reemplazando la función b por la función idénticamente nula. Al tratar con ambas ecuaciones. a la ecuación (3.3) se le suele denominar **ecuación completa o no homogénea** y a la ecuación (3.4) **ecuación homogénea, o reducida**, asociada a (3.3).

Al igual que ocurría con las ecuaciones lineales de primer orden, conocida una solución particular de la ecuación completa, para conocer la solución general es suficiente con conocer la solución general de la ecuación homogénea asociada. Esto es así porque si y_p es una solución particular de la ecuación (3.3) e y_h es una solución arbitraria de la ecuación homogénea asociada (3.4) entonces[1]

$$\begin{aligned} a_n(x)(y_h+y_p)^{(n)} + \cdots + a_1(x)(y_h+y_p)' + a_0(x)(y_h+y_p) &= \\ = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)(y_h+y_p)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\left(y_h^{(k)} + y_p^{(k)}\right) \\ = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)y_h^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} a_k(x)y_p^{(k)} = b(x), \end{aligned}$$

lo que nos dice que $y_h + y_p$ es una solución de la ecuación completa.

Recíprocamente, un razonamiento análogo muestra que la diferencia de dos soluciones de la ecuación completa es una solución de la homogénea asociada. Esto implica, en particular, que cualquier solución de la completa es la suma de y_p y una solución de la ecuación homogénea. Hemos demostrado así el siguiente resultado.

Teorema 3.1.1. *Si y_h es la solución general de la ecuación homogénea (3.4) e y_p es una solución particular de la ecuación completa (3.3) entonces $y_h + y_p$ es la solución general de la ecuación (3.3).*

Como vemos en este teorema el estudio del caso particular de las ecuaciones lineales homogéneas es crucial en el estudio de las ecuaciones lineales. Por este motivo nos vamos a centrar a continuación en el estudio de la estructura de las soluciones de la ecuación homogénea.

[1] Como es habitual, si f es una función, denotaremos por $f^{(0)}$ a la propia función, es decir $f^{(0)} = f$.

Como hemos señalado anteriormente, la función idénticamente nula es una solución de la ecuación diferencial lineal homogénea (3.4). Esta solución se denomina **solución trivial**. El siguiente resultado nos dice que el conjunto de las soluciones de la ecuación homogénea es un subespacio vectorial del espacio vectorial de las funciones n veces derivables.

Teorema 3.1.2 (Principio de superposición). *Sean $y_1, y_2, \ldots, y_m$ soluciones de la ecuación diferencial homogénea*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{3.5}$$

en un intervalo I. La combinación lineal

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_my_m,$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_m$ son constantes reales arbitrarias, también es una solución de (3.5) en el intervalo I.

Demostración. Para simplificar su escritura vamos a hacer la demostración para $m = 2$, la demostración en el caso general es análoga.[2] Por la linealidad de las derivadas se tiene que

$$\begin{aligned} a_n(x)y^{(n)} &+ a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k(x)(c_1y_1 + c_2y_2)^{(k)} = c_1 \sum_{k=0}^{n} a_k(x)y_1^{(k)} + c_2 \sum_{k=0}^{n} a_k(x)y_2^{(k)} = 0. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.1.3. Se comprueba fácilmente que la ecuación diferencial lineal homogénea de grado 2

$$y'' + y = 0$$

tiene como soluciones particulares en todo $\mathbb{R}$ las funciones

$$y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = \operatorname{sen} x.$$

Por el principio de superposición

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias, también es una solución de la ecuación. De hecho esta es la solución general pues si y es una solución cualquiera de la ecuación, la función

$$z(x) = y(0)\cos x + y'(0)\operatorname{sen} x$$

es una solución de la ecuación que satisface $z(0) = y(0)$ y $z'(0) = y'(0)$, lo que, por el teorema 3.0.1, implica que $y = z$.

[2] También se puede deducir del caso $m = 2$ por inducción.

De forma análoga a la empleada en la demostración del principio de superposición para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas se puede demostrar la correspondiente versión del principio para ecuaciones no homogéneas.

Teorema 3.1.4 (Principio de superposición para ecuaciones no homogéneas). *Si para cada $i = 1, 2, \ldots, m$ la función y_i es una solución de la ecuación diferencial*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b_i(x)$$

en un intervalo I, entonces la combinación lineal

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_my_m,$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_m$ son constantes reales arbitrarias, es una solución de la ecuación

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = c_1b_1(x) + \cdots + c_mb_m(x)$$

en el intervalo I.

En el ejemplo 3.1.3 hemos visto que mediante combinaciones lineales de únicamente dos soluciones es posible obtener la solución general de la ecuación. A continuación veremos qué condiciones ha de satisfacer un conjunto de soluciones de una ecuación lineal homogénea para que la solución general se obtenga haciendo combinaciones lineales de ellas.

Definición 3.1.5. Un conjunto de funciones $\{y_1, \ldots, y_n\}$ se dice que es **linealmente dependiente** en un intervalo I si existen constantes reales, $c_1, \ldots, c_n$, no todas nulas, tales que

$$c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x) = 0 \tag{3.6}$$

para todo $x \in I$. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente se dice que es **linealmente independiente**.

Aunque se puede comprobar la dependencia o independencia de un conjunto de funciones acudiendo a la definición, si las funciones son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea existe un procedimiento automático para comprobarlo.

Definición 3.1.6. Dadas n funciones $n-1$ veces derivables, $y_1, \ldots, y_n$, se define el **wronskiano** de $y_1, \ldots, y_n$ como el determinante

$$W[y_1, \ldots, y_n] = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Si las funciones $y_1, \dots, y_n$ son linealmente dependientes en un intervalo I, y $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ son constantes no todas nulas, como en (3.6), entonces, para $1 \leqslant k \leqslant n-1$, también se verifica que

$$c_1 y_1^{(k)}(x) + \cdots + c_n y_n^{(k)}(x) = 0$$

para todo $x \in I$. Suponiendo, para simplificar la escritura, que $c_1 \neq 0$, y haciendo uso de las propiedades de los determinantes se tiene que

$$0 \equiv W\left[\sum_{j=1}^{n} c_j y_j, y_2, \dots, y_n\right] = \sum_{j=1}^{n} c_j W[y_j, y_2, \dots, y_n] = c_1 W[y_1, \dots, y_n]$$

y por tanto que $W[y_1, \dots, y_n] = 0$.

Hemos demostrado de esta manera el siguiente resultado.

Proposición 3.1.7. *Sean $y_1, \dots, y_n$ funciones $n-1$ veces derivables en un intervalo I. Si existe un $x \in I$ tal que $W[y_1, \dots, y_n]$ no se anula en x entonces el conjunto de funciones $y_1, \dots, y_n$ es linealmente independiente en I.*

Corolario 3.1.8. *Toda ecuación diferencial lineal homogénea de orden n tiene n soluciones linealmente independientes.*

Demostración. Por el teorema de existencia y unicidad, 3.0.1, existen soluciones de la ecuación, $y_1, \dots, y_n$, verificando las condiciones iniciales

$$y_k^{(j-1)}(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases} \qquad 1 \leqslant j, k \leqslant n.$$

En este caso la matriz que aparece en la definición del wronskiano tiene unos en la diagonal y ceros en las demás entradas, luego $W[y_1, \dots, y_n](x_0) = 1$. El resultado se sigue de la proposición precedente. □

El recíproco de la proposición 3.1.7 no es cierto en general, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.9. Sean $y_1(x) = x^3$ e $y_2 = |x^3|$. Si c_1, c_2 son tales que

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, particularizando para $x = 1$ y $x = -1$ se tiene que

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ -c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

de donde se deduce que $c_1 = c_2 = 0$. Esto muestra que y_1 e y_2 son linealmente independientes. Sin embargo

$$W[y_1, y_2](x) = \det \begin{pmatrix} x^3 & |x^3| \\ 3x^2 & 3x|x| \end{pmatrix} = 3x^4|x| - 3x^2|x^3| = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

No obstante, cuando las funciones son soluciones de una ecuación lineal homogénea, que es el caso que a nosotros nos interesa, el recíproco de la proposición 3.1.7 sí es cierto. De hecho es cierto un resultado aparentemente más fuerte.

Teorema 3.1.10. *Si $y_1, \ldots, y_n$ son soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{3.7}$$

en un intervalo I, entonces $\{y_1, \ldots, y_n\}$ es linealmente independiente si, y sólo si, $W[y_1, \ldots, y_n]$ no se anula en I.

Demostración. Sólo hay que demostrar que si el conjunto de soluciones es linealmente independiente entonces el wronskiano no se anula nunca. Supongamos que esto último no es cierto. Sea $x_0 \in$ el punto donde el wronskiano se anula. El determinante de la matriz asociada al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcl} c_1y_1(x_0) + \cdots\cdots\cdots + c_ny_n(x_0) &=& 0 \\ c_1y_1'(x_0) + \cdots\cdots\cdots + c_ny_n'(x_0) &=& 0 \\ \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots && \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) &=& 0 \end{array}$$

es precisamente el wronskiano en x_0 que estamos suponiendo que es nulo. Esto nos dice que el sistema tiene una solución $(c_1, \ldots, c_n)$ no nula. Por el principio de superposición la función

$$y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$$

es una solución de (3.7). Esta solución verifica

$$y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Por el corolario 3.0.2, $y \equiv 0$ lo que contradice el que $y_1, \ldots, y_n$ sean linealmente independientes. □

Corolario 3.1.11. *Si $y_1, \ldots, y_n$ son soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n (3.7) en un intervalo I, entonces el wronskiano $W[y_1, \ldots, y_n]$ o es idénticamente nulo o no se anula nunca en el intervalo I.*

Las funciones $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x^2$ muestran que el resultado precedente no es cierto si las funciones no son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea.

Definición 3.1.12. Se denomina **conjunto fundamental de soluciones** de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, en un intervalo I, a cualquier conjunto de n soluciones de la ecuación linealmente independientes en I.

El corolario 3.1.8 se puede reformular en términos de conjuntos fundamentales de soluciones.

Teorema 3.1.13. *Sean $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ funciones continuas en un intervalo I. Existe un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n,*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

en el intervalo I.

El interés de los conjuntos fundamentales de soluciones reside en que con solo n funciones es posible determinar cualquier otra solución de la correspondiente ecuación diferencial lineal homogénea.

Teorema 3.1.14. *Si $y_1, \dots, y_n$ es un conjunto fundamental de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n en un intervalo, entonces la solución general de la ecuación en dicho intervalo es*

$$y = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n, \tag{3.8}$$

donde $c_1, \dots, c_n$ son constantes arbitrarias.

Demostración. Sea y una solución de la ecuación y sea x_0 un punto del intervalo del enunciado. El determinante de la matriz asociada al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{lll} c_1y_1(x_0) + \cdots\cdots & +c_ny_n(x_0) & =y(x_0) \\ c_1y_1'(x_0) + \cdots\cdots & +c_ny_n'(x_0) & =y'(x_0) \\ \vdots \qquad\qquad \ddots & \vdots & \vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots & +c_ny_n^{(n-1)}(x_0) & =y^{(n-1)}(x_0) \end{array}$$

es $W[y_1, \dots, y_n](x_0)$ que es no nulo por hipótesis. Esto implica que el sistema tiene una solución $(c_1, \dots, c_n)$. Por el principio de superposición la función

$$z = c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$$

es una solución de la ecuación que, por la elección de $c_1, \dots, c_n$, satisface las condiciones iniciales

$$z(x_0) = y(x_0), z'(x_0) = y'(x_0), \dots, z^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0).$$

Se deduce del teorema 3.0.1 que $z = y$. □

Hasta aquí hemos estudiado la estructura del conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal de orden n. Hemos visto que la solución general se puede obtener a partir de un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada y una solución particular de la ecuación completa. Sin embargo hasta ahora no hemos visto cómo se pueden encontrar dichas soluciones. Lamentablemente no existe un método general para resolver este tipo de ecuaciones. En las siguientes secciones vamos a estudiar algunos casos particulares para los que existen métodos que nos van a permitir o bien hallar directamente las soluciones de la ecuación o bien transformarla en otra más sencilla que sepamos resolver.

3.2. Reducción del orden de una ecuación diferencial lineal

En el capítulo precedente ya vimos algunos métodos para reducir el orden de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales no necesariamente lineales. Obviamente dichos métodos también son de aplicación al caso de ecuaciones diferenciales lineales. En esta sección vamos a estudiar un nuevo método de reducción del orden, específico para ecuaciones lineales, que da como resultado una nueva ecuación diferencial lineal de orden una unidad menor que el de la ecuación inicial. Este método requiere que se conozca de antemano una solución particular, no trivial, de la ecuación homogénea asociada.

Consideremos la ecuación de orden n

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x).$$

Sea y_1 una solución de la ecuación homogénea asociada. Si hacemos el cambio $y = y_1 z$, haciendo uso de la fórmula de Leibnitz para las derivadas de un producto se tiene que

$$y^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} y_1^{(k-j)}(x) z^{(j)}(x)$$

donde entendemos que la derivada de orden 0 de una función es la propia función. Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación diferencial se tiene

$$\begin{aligned} b(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)y^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} y_1^{(k-j)} z^{(j)} = \\ = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_k(x) y_1^{(k-j)} \right) z^{(j)}. \quad (3.9) \end{aligned}$$

El coeficiente de z en la expresión anterior es

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y_1^{(k)} = a_n(x)y_1^{(n)} + a_{n-1}y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0$$

porque y_1 es una solución de la ecuación homogénea asociada. Teniendo en cuenta esto y denotando b_j al coeficiente de $z^{(j)}$, que es el término entre paréntesis que le precede, la ecuación (3.9) se puede escribir en la forma

$$b_n(x)z^{(n)} + b_{n-1}(x)z^{(n-1)} + \cdots + b_1(x)z' = b(x).$$

Esta ecuación es del tipo estudiado en la sección 2.8.1. Haciendo el cambio $u = z'$ la ecuación anterior se transforma en

$$b_n(x)u^{(n-1)} + b_{n-1}(x)u^{(n-2)} + \cdots + b_1(x)u = b(x)$$

que es una ecuación diferencial lineal de orden $n-1$.

Este método es particularmente interesante en el caso de ecuaciones de orden 2 en las que es fácilmente reconocible una solución particular. En este caso el método reduce la ecuación a una ecuación diferencial lineal de primer orden que sabemos resolver.

Ejemplo 3.2.1. Se comprueba fácilmente que la función $y(x) = 1/x$ es una solución de la ecuación diferencial

$$x^2y'' - 2xy' - 4y = 0$$

en $(0, +\infty)$. Para hallar otra solución de la ecuación en dicho intervalo vamos a aplicar el método de reducción que acabamos de ver.

Haciendo el cambio $y(x) = z(x)/x$ y teniendo en cuenta que

$$y'(x) = \frac{z'(x)}{x} - \frac{z(x)}{x^2} \quad \text{e} \quad y''(x) = \frac{z''(x)}{x} - 2\frac{z'(x)}{x^2} + 2\frac{z(x)}{x^3}$$

la ecuación se puede poner en la forma

$$xz'' - 2z' + 2\frac{z}{x} - 2z' + 2\frac{z}{x} - 4\frac{z}{x} = xz'' - 4z' = 0$$

que haciendo el cambio $u = z'$ se transforma en

$$xu' - 4u = 0$$

cuya solución general es

$$u(x) = cx^4,$$

con c una constante real arbitraria. Como $z = u'$,

$$z(x) = ax^5 + b$$

con a y b constantes reales, luego

$$y(x) = ax^4 + \frac{b}{x}. \tag{3.10}$$

Obsérvese que haciendo $a = 0$ y $b = 1$ se obtiene la solución que ya conocíamos y que para cualquier valor no nulo de a se obtiene una solución linealmente independiente de aquella, por lo que (3.10) es la solución general de la ecuación.

3.3. Ecuaciones lineales con coeficientes constantes

Como ya hemos comentado antes, en general, no es sencillo resolver una ecuación diferencial lineal, sin embargo en el caso particular en que los coeficientes son funciones constantes siempre es posible encontrar un conjunto fundamental de soluciones de una forma bastante directa.

La forma normal de una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes es

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{3.11}$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ son constantes reales.

Como cualquier solución de la ecuación (3.11) es una combinación lineal de sus derivada sucesivas, parece razonable empezar a buscar soluciones de dicha ecuación entre aquellas funciones cuyas derivadas son del mismo tipo que ella. Este es el caso de funciones como las exponenciales, el seno y el coseno. En el capítulo precedente vimos que la ecuación diferencial lineal homogénea de orden uno con coeficiente constantes tenía precisamente una exponencial como solución.

Veamos pues qué condiciones ha de verificar una función de la forma $y(x) = e^{\lambda x}$ para poder ser una solución de (3.11). Si sustituimos la función anterior y sus derivadas en la ecuación se tiene, sacando factor común la exponencial, que

$$\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right) e^{\lambda x} = 0.$$

Como la exponencial no se anula nunca, la única posibilidad de que se satisfaga la ecuación anterior es que

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{3.12}$$

Esta última ecuación se denomina **ecuación característica** de la ecuación (3.11). El polinomio que aparece en lado izquierdo de la ecuación se dice que es el **polinomio característico** de la ecuación (3.11),

Teorema 3.3.1. *La función $y(x) = e^{\lambda x}$ es una solución de la ecuación (3.11) si, y sólo si, λ es una solución de su ecuación característica (3.12).*

Por este procedimiento hemos transformado el problema de encontrar soluciones de una ecuación diferencial en el problema de encontrar raíces de un polinomio. Aunque este último problema en la práctica no siempre es sencillo de resolver, el teorema fundamental del álgebra nos garantiza que un polinomio de grado n siempre tiene n raíces, no necesariamente distintas, complejas. Vamos a analizar las distintas situaciones que se pueden presentar según cómo sean las raíces del polinomio característico.

3.3.1. Raíces reales distintas

Supongamos que la ecuación característica (3.12) tiene n raíces reales distintas $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Según hemos visto más arriba, en este caso, las funciones

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x} \tag{3.13}$$

son soluciones de la ecuación diferencial (3.11). Su wronskiano es

$$\det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \ldots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \ldots e^{\lambda_n x} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

que no se anula porque el determinante último, que es un determinante de Vandermonde, vale

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (\lambda_k - \lambda_j) \neq 0.$$

Esto demuestra que (3.13) es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (3.11).

Teorema 3.3.2. *Si las raíces $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de la ecuación característica (3.12) son todas reales y distintas, entonces*

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x} \tag{3.14}$$

es la solución general de la ecuación (3.11).

Ejemplo 3.3.3. Consideremos la ecuación diferencial

$$y''' + 3y'' - 10y' = 0.$$

Su ecuación característica es

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 10\lambda = 0.$$

Es obvio que una raíz de esta ecuación es $\lambda = 0$. Las otras dos son las soluciones de la ecuación de segundo grado

$$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$$

que son

$$\lambda = \frac{-3+\sqrt{49}}{2} = 2 \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{-3-\sqrt{49}}{2} = -5.$$

El teorema precedente nos dice que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-5x}.$$

3.3.2. Raíces reales de multiplicidad mayor que uno

Si alguna de las raíces de la ecuación característica aparece repetida, es decir si alguna raíz tiene multiplicidad mayor que uno, el procedimiento del apartado anterior no nos proporciona un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación. En este caso hemos de utilizar un método diferente para hallar las soluciones que nos faltan para formar un conjunto fundamental.

Si λ_1 es una raíz real de multiplicidad $m > 1$, haciendo uso de que, por lo visto en el apartado anterior, $e^{\lambda_1 x}$ es una solución de la ecuación (3.11) podemos hacer uso del método que hemos visto en la sección 3.2 para reducir el orden de la ecuación. Sea pues $y(x) = e^{\lambda_1 x} z(x)$. Reemplazando y y sus derivadas en la ecuación (3.11) se tiene, poniendo $a_n = 1$ y operando como en (3.9), que

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_k \lambda_1^{k-j} e^{\lambda_1 x} \right) z^{(j)} = 0$$

o, dividiendo por $e^{\lambda_1 x}$,

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_k \lambda_1^{k-j} \right) z^{(j)} = 0.$$

Esta es una ecuación lineal homogénea de coeficientes contantes

$$b_n z^{(n)} + \cdots + b_1 z' + b_0 z = 0 \tag{3.15}$$

donde

$$b_j = \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_k \lambda_1^{k-j}. \tag{3.16}$$

Si denotamos por P al polinomio característico de (3.11), es decir si

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k,$$

donde $a_n = 1$, se verifica que, si $0 \leqslant j \leqslant n$,

$$P^{(j)}(\lambda) = \sum_{k=j}^{n} k(k-1)\ldots(k-j+1) a_k \lambda^{k-j}$$

luego
$$\frac{P^{(j)}(\lambda)}{j!} = \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_k \lambda^{k-j}.$$
En particular
$$\frac{P^{(j)}(\lambda_1)}{j!} = b_j.$$
Por ser λ_1 una raíz de P de multiplicidad m, se verifica que
$$P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = \cdots = P^{(m-1)}(\lambda_1) = 0 \quad \text{y} \quad P^{(m)}(\lambda_1) \neq 0$$
luego $b_0 = b_1 = \cdots = b_{m-1} = 0$. Teniendo lo anterior en cuenta podemos escribir la ecuación (3.15) en la forma
$$b_n z^{(n)} + \cdots + b_m z^{(m)} = 0. \tag{3.17}$$
Es evidente que cualquier polinomio de grado menor que m es solución de esta ecuación. En particular las funciones $1, x, \ldots, x^{m-1}$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación. Deshaciendo el cambio que hicimos al principio llegamos a que las funciones
$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m-1}e^{\lambda_1 x}$$
son m soluciones linealmente independientes de la ecuación (3.11).

Teorema 3.3.4. *Si λ_1 es una raíz real de la ecuación característica (3.12), de multiplicidad $m > 1$, entonces las funciones*
$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m-1}e^{\lambda_1 x}$$
son m soluciones linealmente independientes de la ecuación (3.11).

Se comprueba sin excesiva dificultad que los conjuntos de soluciones formados por soluciones de los tipos indicados en la sección 3.3.1 y el teorema 3.3.4 para distintas raíces de la ecuación característica son linealmente independientes.

Ejemplo 3.3.5. Consideremos la ecuación
$$y'' + 2y' + y = 0. \tag{3.18}$$
La ecuación característica de la ecuación (3.18) es
$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$$
que tiene una única raíz $\lambda = -1$ de multiplicidad 2. El teorema precedente nos dice que las funciones e^{-x} y xe^{-x} forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (3.18). En consecuencia la solución general de dicha ecuación será
$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$
donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias.

Ejemplo 3.3.6. La ecuación diferencial lineal de orden 5

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y''' - y'' = 0 \tag{3.19}$$

tiene como ecuación característica la ecuación

$$\lambda^5 - 3\lambda^4 + 3\lambda^3 - \lambda^2 = \lambda^2\left(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1\right) = \lambda^2(\lambda-1)^3 = 0$$

que tiene dos raíces $\lambda = 0$, de multiplicidad 2, y $\lambda = 1$, de multiplicidad 3. Se deduce del teorema 3.3.4 que las funciones

$$1, \quad x, \quad e^x, \quad xe^x \quad \text{y} \quad x^2e^x$$

son soluciones de la ecuación (3.19). En consecuencia la solución general de ecuación es

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4xe^x + c_5x^2e^x$$

donde $c_1, \ldots, c_5$ son constantes reales arbitrarias.

3.3.3. Raíces complejas simples

Antes de comenzar el estudio de este caso vamos a recordar algunos conceptos. Una función z definida en un intervalo I de la recta real y que toma valores complejos puede ser vista como un par de funciones reales (u, v) definidas en I de manera que $z(x) = u(x) + iv(x)$. La función u se dice que es la **parte real** de la función z y v se dice que es la **parte imaginaria**. La función z se dice que es derivable en $x \in I$ si lo son u y v y, en este caso, se define su derivada en x como $z'(x) = u'(x) + iv'(x)$, Con esta definición de derivada de una función compleja tiene sentido que ampliemos nuestro estudio de las ecuaciones diferenciales a las funciones complejas. Resulta obvio que z es una solución de la ecuación (3.11) si, y sólo si, lo son su parte real y su parte imaginaria.

Recordemos también que, haciendo uso de la fórmula de Euler, la exponencial de un número complejo λ, $\lambda = \alpha + i\beta$, α y β reales,[3] se puede expresar como

$$e^\lambda = e^\alpha\left(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta\right).$$

Haciendo uso de esta expresión se tiene que para $\lambda = \alpha + \beta i$, la función

$$z(x) = e^{\lambda x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$$

es derivable en todo $\mathbb{R}$ y su derivada es

$$\begin{aligned} z'(x) =& \big(\alpha e^{\alpha x}\cos(\beta x) - \beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)\big) + i\big(\alpha e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) + \beta e^{\alpha x}\cos(\beta x)\big) \\ =& e^{\alpha x}\Big[\big(\alpha\cos(\beta x) - \beta\operatorname{sen}(\beta x)\big) + i\big(\alpha\operatorname{sen}(\beta x) + \beta\cos(\beta x)\big)\Big] \\ =& \lambda e^{\alpha x}\big(\cos(\beta x) + i\operatorname{sen}(\beta x)\big) = \lambda z(x). \end{aligned}$$

[3] Siempre que expresemos un número complejo en la forma $\alpha + \beta i$ consideraremos que α y β son reales salvo mención expresa de lo contrario.

Repitiendo el proceso se tiene que

$$z^{(j)} = \lambda^j z, \qquad j = 1, 2, \ldots.$$

Esto nos dice que las fórmulas de las derivadas sucesivas de la exponencial compleja son las mismas que las de la exponencial real. Por lo tanto, el argumento que hicimos al principio de esta sección para exponenciales reales sigue siendo válido para exponenciales complejas y el teorema 3.3.1 sigue siendo cierto cuando λ es un número complejo.

Teorema 3.3.7. *Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. La función $e^{\lambda x}$ es una solución de la ecuación (3.11) si, y sólo si, λ es una solución de su ecuación característica (3.12).*

De modo que si λ es una solución compleja de la ecuación característica (3.12), la función $z(x) = e^{\lambda x}$ es una solución compleja de la ecuación (3.11) y, por lo visto más arriba, sus partes real e imaginaria son soluciones reales de la ecuación (3.11).

Teorema 3.3.8. *Si la ecuación característica (3.12) tiene una raíz compleja simple, $\lambda = \alpha + i\beta$, entonces las funciones*

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x) \quad y \quad e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x) \tag{3.20}$$

son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (3.11).

Observación 3.3.9. Si un polinomio con coeficientes reales tiene una raíz compleja $\lambda = \alpha + i\beta$ entonces $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ también es raíz del polinomio. En consecuencia las raíces complejas, no reales, aparecen siempre en un número par.

Si P es el polinomio característico de la ecuación (3.11) y λ es una raíz de P, como las exponenciales $e^{\lambda x}$ y $e^{\overline{\lambda} x}$ también son conjugadas, sus partes reales coinciden y sus partes imaginarias son opuestas. En consecuencia ambas raíces generan el mismo subespacio vectorial de soluciones de la ecuación (3.11) y por lo tanto para obtener soluciones linealmente independientes sólo hay que aplicar el teorema precedente a λ o a su conjugado.

Ejemplo 3.3.10. La ecuación diferencial

$$4y'' + 4y' + 5y = 0 \tag{3.21}$$

tiene como ecuación característica la ecuación

$$4\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

que no posee raíces reales. Sus raíces complejas son

$$\lambda_1 = \frac{-2+4i}{4} = -\frac{1}{2} + i \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{-2-4i}{4} = -\frac{1}{2} - i.$$

Se deduce del teorema precedente que la solución general de la ecuación (3.21) es

$$y(x) = e^{-\frac{x}{2}}\big[c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x\big].$$

3.3.4. Raíces complejas de multiplicidad mayor que uno

El mismo argumento del apartado 3.3.2 muestra que si $\lambda = \alpha + i\beta$ es una raíz compleja de multiplicidad $m > 1$, entonces las funciones

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m-1}e^{\lambda_1 x}$$

son m soluciones complejas de la ecuación (3.11). Por lo tanto, las partes reales e imaginarias de estas funciones son $2m$ soluciones reales de la ecuación. Se comprueba fácilmente que dichas soluciones son linealmente independientes.

Teorema 3.3.11. *Si $\lambda = \alpha + i\beta$ es una raíz compleja de la ecuación característica (3.12), de multiplicidad $m > 1$, entonces las $2m$ funciones*

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

y

$$e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), xe^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

son soluciones linealmente independientes de la ecuación (3.11).

Ejemplo 3.3.12. La ecuación diferencial

$$y^{(4)} + 12y^{(3)} + 62y'' + 156y' + 169y = 0 \tag{3.22}$$

tiene como ecuación característica

$$\lambda^4 + 12\lambda^3 + 62\lambda^2 + 156\lambda + 169 = 0$$

que puede escribirse también, completando cuadrados,

$$\left(\lambda^2 + 6\lambda\right)^2 + 26\left(\lambda^2 + 6\lambda\right) + 13^2 = \left(\lambda^2 + 6\lambda + 13\right)^2 = 0.$$

Esta ecuación tiene dos raíces complejas dobles

$$\lambda_1 = -3 + 2i \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -3 - 2i.$$

Por el teorema precedente, la solución general de la ecuación (3.22) es

$$y(x) = e^{-3x}\Big[\big(c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x\big) + x\big(c_3\cos 2x + c_4\operatorname{sen} 2x\big)\Big].$$

3.4. Método de variación de las constantes

En esta sección vamos a describir un método para hallar una solución particular de la ecuación completa a partir de la solución de la ecuación homogénea asociada. El método es análogo al método del mismo nombre, que vimos en 2.5, para ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Si $y_1, \dots, y_n$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \tag{3.23}$$

buscamos soluciones de esta ecuación de la forma

$$y(x) = u_1(x)y_1(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x).$$

Vamos a imponer una serie de condiciones sobre las funciones $u_1, \dots, u_n$ de manera que se simplifiquen los cálculos con la función y. Así, si suponemos que

$$u_1'(x)y_1(x) + \cdots + u_n'(x)y_n(x) = 0 \tag{3.24}$$

la derivada de y es

$$\begin{aligned} y'(x) =& u_1'(x)y_1(x) + u_1(x)y_1'(x) + \cdots + u_n'(x)y_n(x) + u_n(x)y_n'(x) \\ =& u_1'(x)y_1(x) + \cdots + u_n'(x)y_n(x) + u_1(x)y_1'(x) + \cdots + u_n(x)y_n'(x) \\ =& u_1(x)y_1'(x) + \cdots + u_n(x)y_n'(x). \end{aligned} \tag{3.25}$$

De manera análoga se comprueba que si, para $1 \leqslant k < n-1$, imponemos la condición

$$u_1'(x)y_1^{(k)}(x) + \cdots + u_n'(x)y_n^{(k)}(x) = 0, \tag{3.26}$$

entonces

$$y^{(k+1)}(x) = u_1(x)y_1^{(k+1)}(x) + \cdots + u_n(x)y_n^{(k+1)}(x). \tag{3.27}$$

Por último, si pedimos que

$$u_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + u_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = b(x) \tag{3.28}$$

se comprueba de la misma manera que

$$y^{(n)}(x) = u_1(x)y_1^{(n)}(x) + \cdots + u_n(x)y_n^{(n)}(x) + b(x). \tag{3.29}$$

Si existen funciones $u_1, \ldots, u_n$ que verifiquen las condiciones (3.24), (3.26) y (3.28) entonces

$$\begin{aligned} y^{(n)} + & a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y' + a_0(x) y = \\ & = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) y_k^{(n)} + b(x) + a_{n-1}(x) \sum_{k=0}^{n} u_k(x) y_k^{(n-1)} + \cdots \\ & \quad \cdots + a_1(x) \sum_{k=0}^{n} u_k(x) y_k' + a_0(x) \sum_{k=0}^{n} u_k(x) y_k \\ & = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \left(y_k^{(n)} + a_{n-1}(x) y_k^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y_k' + a_0(x) y_k \right) + b(x) \\ & = b(x) \end{aligned}$$

porque las funciones y_k son soluciones de la ecuación homogénea. En consecuencia, la función y es solución de la ecuación (3.23). Por tanto, sólo queda demostrar que existen funciones $u_1, \ldots, u_n$ que satisfacen las condiciones (3.24), (3.26) y(3.28) y hallarlas. Es decir, hay que demostrar que el sistema

$$\begin{aligned} u_1'(x) y_1(x) + \cdots\cdots\cdots + u_n'(x) y_n(x) & = 0 \\ u_1'(x) y_1'(x) + \cdots\cdots\cdots + u_n'(x) y_n'(x) & = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \qquad & \quad \vdots \\ u_1'(x) y_1^{(n-2)}(x) + \cdots\cdots + u_n'(x) y_n^{(n-2)}(x) & = 0 \\ u_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \cdots\cdots + u_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) & = b(x) \end{aligned}$$

tiene solución y hallarla. Como el determinante de la matriz asociada al sistema es

$$\det \begin{pmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} = W[y_1, \ldots, y_n](x),$$

que es no nulo porque $y_1, \ldots, y_n$ es un conjunto fundamental de soluciones, el sistema tiene una única solución $(u_1'(x), \ldots, u_n'(x))$,

$$u_k'(x) = (-1)^{n+k} b(x) \frac{W_k[y_1, \ldots, y_n](x)}{W[y_1, \ldots, y_n](x)}, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{3.30}$$

donde $W_k[y_1, \ldots, y_n]$ denota el wronskiano de las funciones y_j, $j = 1, \ldots, n$, $j \neq k$. Para obtener las funciones u_k basta con calcular una primitiva de la función de la derecha en (3.30).

Ejemplo 3.4.1. La ecuación homogénea asociada a la ecuación

$$y''' + y' = \operatorname{tg} x, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \tag{3.31}$$

tiene como ecuación característica

$$\lambda^3 + \lambda = 0 \tag{3.32}$$

que tiene una solución real $\lambda = 0$ y dos complejas $\lambda = \pm i$. En consecuencia un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea está formado por las funciones

$$1, \cos x, \operatorname{sen} x$$

y

$$W[1, \cos x, \operatorname{sen} x] = \det \begin{pmatrix} 1 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{pmatrix} = 1$$

El método de variación de las constantes nos dice que podemos obtener una solución particular de la ecuación (3.31) de la forma

$$y_p(x) = u_1(x) + u_2(x)\cos x + u_3(x)\operatorname{sen} x$$

si u_1, u_2 y u_3 satisfacen:

$$\begin{aligned} u_1'(x) + u_2'(x)\cos x + u_3'(x)\operatorname{sen} x &= 0 \\ -u_2'(x)\operatorname{sen} x + u_3'(x)\cos x &= 0 \\ -u_2'(x)\cos x - u_3'(x)\operatorname{sen} x &= \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Esto ocurre si

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= \operatorname{tg} x \cdot \det \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix} = \operatorname{tg} x \\ u_2'(x) &= -\operatorname{tg} x \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{sen} x \\ 0 & \cos x \end{pmatrix} = -\operatorname{sen} x \\ u_3'(x) &= \operatorname{tg} x \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & \cos x \\ 0 & -\operatorname{sen} x \end{pmatrix} = -\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Basta por tanto elegir

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\log(\cos x) \\ u_2(x) &= \cos x \\ u_3(x) &= \log\left(\frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}\right) + \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

para obtener la solución particular de (3.31), en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$
\begin{aligned}
y_p(x) =& -\log(\cos x) + \cos^2 x + \operatorname{sen} x \left[\log\left(\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\right) + \operatorname{sen} x\right] \\
=& 1 - \log(\cos x) - \operatorname{sen} x \log\left(\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}\right).
\end{aligned}
$$

Se deduce de 3.1.1 que la solución general de la ecuación (3.31) en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ es

$$
y(x) = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x - \log(\cos x) - \operatorname{sen} x \log\left(\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)
$$

donde c_1, c_2, c_3 son constantes reales arbitrarias.

Observación 3.4.2. El método de variación de las constantes sirve para obtener una solución particular de una ecuación diferencial lineal cualquiera siempre que se conozca la solución general de la ecuación homogénea asociada. En la práctica, si la ecuación no es de coeficientes constantes, el método puede no ser aplicable porque no sea posible, o sea muy complicado, obtener la solución general de la ecuación homogénea asociada

3.5. Método de los coeficientes indeterminados

El método de variación de las constantes es interesante porque siempre proporciona una solución particular de la ecuación completa supuesto conocido un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada. Sin embargo tiene el inconveniente de que a menudo aparecen primitivas que no son fáciles de calcular.

En esta sección vamos a ver un método para encontrar una solución particular de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$
y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(x). \tag{3.33}
$$

A diferencia del método que hemos visto en la sección previa que valía cualquiera que fuese la función b, este método sólo es válido cuando b es un polinomio, una función exponencial, un seno, un coseno, productos de los tipos previos o combinaciones lineales de todos ellos. La idea subyacente en este método es que todas estas funciones tiene derivadas que son también de uno de esos tipos por lo que parece razonable buscar soluciones similares a la función b.

Teorema 3.5.1 (Método de los coeficientes indeterminados). *Si b es una función de la forma*

$$
b(x) = e^{\alpha x}\big(P(x)\cos\beta x + Q(x)\operatorname{sen}\beta x\big) \tag{3.34}
$$

donde α y β son números reales, P es un polinomio de grado k_1 y Q es un polinomio de grado k_2, entonces existen dos polinomios de grado $k = \text{máx}(k_1, k_2)$, P_1 y Q_1, tales que la función

$$y_p(x) = x^m e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + Q_1(x)\operatorname{sen}\beta x) \tag{3.35}$$

donde m es la multiplicidad de $\lambda = \alpha + \beta i$ como raíz de la ecuación característica,[4] *es una solución particular de la ecuación (3.33).*

Demostración. Por el principio de superposición para ecuaciones no homogéneas, 3.1.4, para hallar una solución particular de (3.33) es suficiente con encontrar soluciones particulares, u_p y v_p de las ecuaciones

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = e^{\alpha x}\big(P(x)\cos\beta x\big)$$

y

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = e^{\alpha x}\big(Q(x)\operatorname{sen}\beta x\big).$$

respectivamente. En este caso, la función $y_p = u_p + v_p$ es una solución de (3.33). Por otra parte, como el término de la derecha de la primera ecuación es la parte real de la función $P(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$ y el de la segunda es la parte imaginaria de la función $Q(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$, según vimos en 3.3.3, es suficiente con demostrar que la ecuación diferencial compleja

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = e^{\lambda x}R(x) \tag{3.36}$$

donde R es un polinomio real, tiene una solución particular de la forma

$$x^m e^{\lambda x}R_1(x)$$

con R_1 un polinomio del mismo grado que R.

Haciendo el cambio $y = e^{\lambda x}z_p$, el argumento hecho en 3.3.2 demuestra que y_p es una solución de (3.36) si, y solo si, z_p es una solución particular de la ecuación

$$b_n z^{(n)} + \cdots + b_m z^{(m)} = R(x) \tag{3.37}$$

donde $b_m, \dots, b_n$ son como en (3.16). En particular $b_m \neq 0$.

Un polinomio z_p de la forma

$$z_p(x) = A_0x^m + A_1x^{m+1} + \cdots + A_kx^{m+k}$$

es solución de la ecuación (3.37) si, y sólo si, los polinomios

$$T(x) = b_n z_p^{(n)}(x) + \cdots + b_m z_p^{(m)}(x)$$

[4] Si λ no es una raíz de la ecuación característica se considera que $m = 0$.

y R son iguales o, equivalentemente, si tienen los mismos coeficientes. El polinomio T es de grado menor o igual que k y, para $j = 0, 1, \ldots, k$, el coeficiente de la potencia j-ésima de T es

$$\begin{aligned}\frac{T^{(j)}(0)}{j!} &= \frac{1}{j!}\left(b_n z_p^{(n+j)}(0) + \cdots + b_m z_p^{(m+j)}(0)\right)\\ &= \frac{1}{j!}\left(b_n(n+j)!A_{n+j-m} + \cdots + b_m(m+j)!A_j\right)\end{aligned}$$

donde $A_i = 0$ si $i > k$. Luego si

$$R(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k$$

z_p es solución de (3.37) si, y sólo si, para $0 \leqslant j \leqslant k$

$$c_j = \frac{1}{j!}\big(b_m(m+j)!A_j + b_{m+1}(m+j+1)!A_{j+1} + \cdots + b_n(n+j)!A_{n+j-m}\big).$$

Estas ecuaciones forman un sistema de $k+1$ ecuaciones y $k+1$ incógnitas $A_0, \ldots, A_k$ (recuérdese que $A_i = 0$ si $i > k$) que tiene asociada una matriz triangular de la forma

$$\begin{pmatrix} b_m m! & & & & & \\ 0 & b_m(m+1)! & & & & \\ 0 & 0 & b_m\frac{(m+2)!}{2!} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_m\frac{(m+k-1)!}{(k-1)!} & \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & b_m\frac{(m+k)!}{k!} \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es no nulo porque $b_m \neq 0$. Esto nos dice que el sistema tiene solución y por lo tanto que existe una elección de los coeficientes $A_0, \ldots, A_k$ que hacen que z_p sea una solución de (3.37). □

Como se ve en la demostración del teorema precedente el método en última instancia consiste en determinar los coeficientes de los polinomios que aparecen en (3.35) para que y_p sea una solución de (3.33).

Si la función b es una combinación lineal de funciones del tipo indicado en el teorema, basta aplicar el teorema para cada una de esas funciones y aplicar el principio de superposición para ecuaciones no homogéneas (teorema 3.1.4).

Una vez que hemos visto la validez del método vamos a ver, mediante un a serie de ejemplos, cómo se aplica el método según en los distintos casos particulares de la función b.

3.5.1. Caso de polinomios y exponenciales

Comenzaremos considerando el caso de polinomios, exponenciales y sus productos. Este es el caso en que la función b es de la forma

$$b(x) = e^{\alpha x} P(x)$$

donde P es un polinomio de grado k. Este es el caso particular de (3.34) cuando $\beta = 0$. La solución particular (3.35) se reduce a

$$y_p(x) = e^{\alpha x} x^m P_1(x)$$

donde m es la multiplicidad de $\lambda = \alpha$ como raíz de la ecuación característica, cero si no es raíz, y P_1 es un polinomio de grado k. Obsérvese que cuando b es un polinomio $\alpha = 0$ por lo que habrá que considerar la multiplicidad de $\lambda = 0$ como raíz de la ecuación característica.

Ejemplo 3.5.2. Queremos encontrar la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1. \tag{3.38}$$

Comenzaremos buscando la solución general de la ecuación homogénea asociada. La ecuación característica es

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

que tiene las raíces

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}.$$

Para calcular una solución particular de (3.38), utilizaremos el método de los coeficientes indeterminados. Como, en este caso,

$$b(x) = 2x^2 + 1$$

que es un polinomio de grado 2 y 0 no es una solución de la ecuación característica, la solución particular ha de tener la forma

$$y_p(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2.$$

Como las dos primeras derivadas de esta función son

$$y_p'(x) = A_1 + 2A_2 x \quad \text{e} \quad y_p''(x) = 2A_2,$$

sustituyendo en la ecuación diferencial (3.38) se tiene que

$$2A_2 - 3(A_1 + 2A_2 x) + 2(A_0 + A_1 x + A_2 x^2) = 2x^2 + 1$$

o

$$2A_2 - 3A_1 + 2A_0 + (-6A_2 + 2A_1)x + 2A_2 x^2 = 2x^2 + 1.$$

Igualando coeficientes

$$\begin{aligned} 2A_2 - 3A_1 + 2A_0 &= 1 \\ -6A_2 + 2A_1 &= 0 \\ 2A_2 &= 2 \end{aligned}$$

luego $A_2 = 1$, $A_1 = 3$ y $A_0 = 4$. En consecuencia

$$y_p(x) = x^2 + 3x + 4$$

y la solución general de (3.38) es

$$y(x) = x^2 + 3x + 4 + c_1 e^{2x} + c_2 e^x.$$

Ejemplo 3.5.3. Consideremos la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' = 2x^2 + 1. \tag{3.39}$$

La ecuación característica en este caso es

$$\lambda^2 - 3\lambda = 0$$

que tiene las raíces $\lambda = 0$ y $\lambda = 3$. Como 0 es una raíz de multiplicidad 1 de la ecuación característica, hemos de buscar una solución particular de la forma

$$y_p(x) = x(A_0 + A_1 x + A_2 x^2).$$

Derivando se tiene que

$$y_p'(x) = A_0 + 2A_1 x + 3A_2 x^2 \quad \text{e} \quad y_p''(x) = 2A_1 + 6A_2 x$$

y sustituyendo en (3.39) se tiene que

$$2A_1 + 6A_2 x - 3(A_0 + 2A_1 x + 3A_2 x^2) = 2x^2 + 1.$$

Por último, igualando coeficientes

$$\begin{aligned} 2A_1 - 3A_0 &= 1 \\ 6A_2 - 6A_1 &= 0 \\ -9A_2 &= 2 \end{aligned}$$

de donde sale que $A_2 = A_1 = -\frac{2}{9}$ y $A_0 = \frac{13}{27}$. En consecuencia

$$y_p(x) = x\left(\frac{13}{27} - \frac{2}{9}x - \frac{2}{9}x^2\right)$$

es una solución particular de la ecuación (3.39).

Ejemplo 3.5.4. Consideramos la ecuación diferencial

$$y'' + y = e^{-x}. \tag{3.40}$$

La ecuación característica es

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

que tiene dos raíces complejas $\lambda = \pm i$. La solución particular que buscamos tiene la forma

$$y_p(x) = Ae^{-x}.$$

Sustituyendo en (3.40) se tiene que

$$Ae^{-x} + Ae^{-x} = e^{-x}$$

de donde se concluye que $A = \frac{1}{2}$. En consecuencia

$$y_p(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$$

es una solución particular de (3.40).

Ejemplo 3.5.5. La ecuación homogénea asociada a la ecuación

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 4e^{x} \tag{3.41}$$

tiene como ecuación característica

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0$$

que tiene una única raíz $\lambda = 1$ triple. La solución particular que buscamos, haciendo uso del método de los coeficientes indeterminados, es de la forma

$$y_p(x) = Ax^3e^{x}.$$

Sus derivadas son

$$\begin{aligned}
y_p'(x) =& Ae^{x}(3x^2 + x^3),\\
y_p''(x) =& Ae^{x}(6x + 6x^2 + x^3)\\
y_p'''(x) =& Ae^{x}(6 + 18x + 9x^2 + x^3)
\end{aligned}$$

que sustituyendo en (3.41) nos dan que

$$\begin{aligned}
Ae^{x}\left[6 + 18x + 9x^2 + x^3 - 3(6x + 6x^2 + x^3) + 3(3x^2 + x^3) - x^3\right] =\\
= 6Ae^{x} = 4e^{x}
\end{aligned}$$

de donde se deduce que $A = \frac{2}{3}$. En consecuencia

$$y_p(x) = \frac{2}{3}x^3e^{x}$$

es una solución particular de la ecuación (3.41).

Obsérvese que las funciones e^x, xe^x y x^2e^x son soluciones de la ecuación homogénea asociada a (3.41), por lo que ninguna de ellas puede ser solución de la ecuación completa. Por este motivo, al buscar la solución particular es preciso considerar la multiplicidad de la raíz 1 en la ecuación característica e introducir el factor x^3 en la solución buscada.

Como hemos indicado más arriba, cuando la función b es una combinación lineal de productos de polinomios y exponenciales se buscan soluciones para cada uno de los productos y se emplea el principio de superposición para ecuaciones no homogéneas.

Ejemplo 3.5.6. Para hallar una solución particular de la ecuación

$$y'' - y' = x^3 + x + e^{2x} - 2xe^{2x} \tag{3.42}$$

vamos a hallar una solución particular de la ecuación con $b(x) = x^3 + x$ y otra para la ecuación con $b(x) = (1 - 2x)e^{2x}$. Por el principio de superposición, 3.1.4, la suma de las anteriores soluciones es una solución de (3.42). La ecuación característica de la ecuación homogénea asociada a (3.42) es

$$\lambda^2 - \lambda = 0$$

que tiene dos soluciones $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$. Para el caso de $b(x) = x^3 + x$ como $\lambda = 0$ es una raíz simple de la ecuación característica la solución particular buscada es de la forma

$$y_1(x) = x(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3).$$

Sus derivadas son

$$y_1'(x) = A_0 + 2A_1x + 3A_2x^2 + 4A_3x^3, \quad y_1''(x) = 2A_1 + 6A_2x + 12A_3x^2$$

que trasladadas a la correspondiente ecuación nos dan

$$2A_1 + 6A_2x + 12A_3x^2 - (A_0 + 2A_1x + 3A_2x^2 + 4A_3x^3) = x^3 + x$$

e identificando coeficientes

$$\begin{aligned} 2A_1 - A_0 &= 0 & \qquad 6A_2 - 2A_1 &= 1 \\ 12A_3 - 3A_2 &= 0 & -4A_3 &= 1 \end{aligned}$$

de donde se deduce que $A_3 = -\frac{1}{4}$, $A_2 = -1$, $A_1 = -\frac{7}{2}$ y $A_0 = -7$.

Para $b(x) = (1 - 2x)e^{2x}$, buscamos una solución particular y_2 de la forma

$$y_2(x) = e^{2x}(A_4 + A_5x),$$

Derivando tenemos que

$$y_2'(x) = e^{2x}(2A_4 + A_5 + 2A_5x), \quad y_2''(x) = 4e^{2x}(A_4 + A_5 + A_5x)$$

que sustituidas en la correspondiente ecuación nos dan

$$e^{2x}\left[4(A_4 + A_5 + A_5x) - (2A_4 + A_5 + 2A_5x)\right] = e^{2x}(1 - 2x).$$

Dividiendo ambos miembros e identificando coeficientes se llega a

$$2A_4 + 3A_5 = 1 \qquad 2A_5 = -2$$

de donde $A_5 = -1$ y $A_4 = 2$.

Sumando ambas soluciones se obtiene

$$y_p(x) = -x\left(7 + \frac{7}{2}x + x^2 + \frac{1}{4}x^3\right) + e^{2x}(2 - x)$$

que, por el principio de superposición 3.1.4, es una solución particular de la ecuación (3.42).

3.5.2. Caso de polinomios y funciones seno y coseno

Vamos ahora a considerar el caso de funciones senos y cosenos y productos de estas funciones por polinomios. En este caso b es de la forma

$$b(x) = P(x)\cos\beta x + Q(x)\operatorname{sen}\beta x$$

donde P es un polinomio de grado k_1 y Q es un polinomio de grado k_2 y la solución particular (3.35) es de la forma

$$y_p(x) = x^m(P_1(x)\cos\beta x + Q_1(x)\operatorname{sen}\beta x)$$

donde m es la multiplicidad de $\lambda = \beta i$ como raíz de la ecuación característica y P_1 y Q_1 son dos polinomios de grado $k = \text{máx}(k_1, k_2)$.

Ejemplo 3.5.7. La ecuación característica de la ecuación homogénea asociada a la ecuación diferencial

$$y'' - y' + y = 2\operatorname{sen} 3x \tag{3.43}$$

es

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

que tiene dos soluciones complejas $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Como $3i$ no es una raíz de la ecuación característica buscamos una solución particular de la forma

$$y_p(x) = A\cos 3x + B\operatorname{sen} 3x.$$

Derivando

$$y_p'(x) = -3(A \operatorname{sen} 3x - B \cos 3x) \quad \text{e} \quad y_p''(x) = -9(A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x),$$

substituyendo en la ecuación

$$\begin{aligned}-9(A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x) + 3(A \operatorname{sen} 3x - B \cos 3x)+\\ + A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x = 2 \operatorname{sen} 3x,\end{aligned}$$

e igualando coeficientes, se obtiene que

$$\begin{aligned}-8A - 3B &= 0\\ 3A - 8B &= 2\end{aligned}$$

de donde se deduce que $A = \frac{6}{73}$ y $B = -\frac{16}{73}$. Por lo tanto una solución particular de la ecuación (3.43) es

$$y_p(x) = \frac{6}{73} \cos 3x - \frac{16}{73} \operatorname{sen} 3x.$$

Como el ejemplo precedente muestra, aunque la función b sólo tenga un factor en senos el método de los coeficientes indeterminados requiere que en la solución particular aparezca también un factor en cosenos.

Ejemplo 3.5.8. Consideremos la ecuación diferencial

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = x \operatorname{sen} 2x + x^2 \cos 2x \tag{3.44}$$

La ecuación característica de la ecuación homogénea asociada

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = (\lambda^2 + 4)^2 = 0$$

tiene dos raíces complejas $\lambda = \pm 2i$ de multiplicidad 2. La solución particular que buscamos es de la forma

$$y_p(x) = x^2\big[\big(A_0 + A_1 x + A_2 x^2\big) \cos 2x + \big(B_0 + B_1 x + B_2 x^2\big) \operatorname{sen} 2x\big].$$

En este caso los cálculos, aunque igual de sencillos que en los ejemplos anteriores, son excesivamente largos por lo que es conveniente, en lugar de derivar, sustituir en la ecuación e igualar coeficientes, buscar algún procedimiento que simplifique los cálculos. En casos como este es conveniente proceder como en la demostración del teorema dividiendo el problema en dos y eliminando de los cálculos las funciones trigonométricas. Consideremos en primer lugar la ecuación diferencial

$$z^{(4)} + 8z'' + 16z = xe^{2xi}. \tag{3.45}$$

Si z_1 es una solución de esta ecuación entonces $y_1 = \operatorname{Im} z_1$, la parte imaginaria de z_1, es una solución de la ecuación

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = x \operatorname{sen} 2x. \tag{3.46}$$

Haciendo el cambio $z(x) = w(x)e^{2ix}$, y operando de manera análoga a como lo hicimos en el caso real en 3.3.2, la ecuación (3.45) se transforma en la ecuación

$$w^{(4)} + b_3 w^{(3)} + b_2 w'' = x, \tag{3.47}$$

donde $j!b_j$ es la derivada j-ésima del polinomio característico en $2i$, es decir

$$b_2 = \frac{4\big(3(2i)^2 + 4\big)}{2!} = -16 \quad \text{y} \quad b_3 = \frac{24(2i)}{3!} = 8i.$$

Haciendo un nuevo cambio $v = w''$, la ecuación (3.47) se transforma en la ecuación

$$v'' + 8iv' - 16v = x.$$

Como 0 no es una raíz del polinomio característico de esta ecuación, tendrá una solución particular de la forma

$$v_p(x) = C_0 + C_1 x.$$

Derivando, sustituyendo en la ecuación e igualando coeficientes se llega a que $C_1 = -\frac{1}{16}$ y $C_0 = -\frac{i}{32}$. Integrando dos veces se tiene que la función

$$w_p(x) = \frac{C_0}{2}x^2 + \frac{C_1}{6} = -\frac{i}{64}x^2 - \frac{1}{96}x^3$$

es una solución particular de la ecuación (3.47). Por último, la función

$$y_1 = \operatorname{Im}\big(w_p(x)e^{2ix}\big) = -\frac{1}{64}x^2 \cos 2x - \frac{1}{96}x^3 \operatorname{sen} 2x$$

es una solución particular de la ecuación (3.46).

Análogamente, si z_2 es una solución de la ecuación

$$z^{(4)} + 8z'' + 16z = x^2 e^{2xi}$$

entonces su parte real y_2 es una solución particular de la ecuación

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = x^2 \cos 2x. \tag{3.48}$$

Razonando de forma análoga a la de la primera parte del ejemplo, se llega a que

$$y_2(x) = \left(\frac{3}{256}x^2 - \frac{1}{192}x^4\right)\cos 2x + \frac{x^3}{96}\operatorname{sen} 2x.$$

es una solución de (3.48). Por el principio de superposición se tiene que

$$y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) = -\left(\frac{x^2}{256} + \frac{x^4}{192}\right)\cos 2x$$

es una solución particular de (3.44).

3.5.3. Caso general

Concluimos esta sección con un par de ejemplos en los que en la función de entrada b aparecen polinomios, exponenciales y funciones seno y coseno.

Ejemplo 3.5.9. La ecuación característica de la ecuación homogénea asociada a la ecuación

$$y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}\cos 2x \tag{3.49}$$

es

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

que tiene dos raíces

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{array}{l} \nearrow \text{-1} \\ \searrow \text{-2} \end{array}$$

Aplicando el teorema 3.5.1 se sabe que la ecuación (3.49) tiene una solución particular de la forma

$$y_p(x) = e^{-x}\big((A_0 + A_1x)\cos 2x + (B_0 + B_1x)\operatorname{sen} 2x\big).$$

Los coeficientes A_0, A_1, B_0 y B_1 se calculan como en los ejemplos precedentes.

Ejemplo 3.5.10. La ecuación característica de la ecuación homogénea asociada a la ecuación

$$y'' + 2y' + 5y = x^3e^{-x}\operatorname{sen} 2x \tag{3.50}$$

es

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

que tiene dos raíces

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{25-9}\,i}{2} = -1 \pm 2i.$$

Aplicando el teorema 3.5.1, se tiene que la ecuación (3.50) tiene una solución particular de la forma

$$y_p(x) = \\ = xe^{-x}\big((A_0{+}A_1x{+}A_2x^2{+}A_3x^3)\cos 2x{+}(B_0{+}B_1x{+}B_2x^2{+}B_3x^3)\operatorname{sen} 2x\big).$$

Los coeficientes $A_0, \ldots, A_3, B_0, \ldots, B_3$ se calculan como en los ejemplos precedentes.

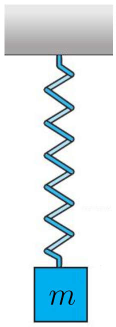


Figura 3.1: Muelle vertical

3.6. Oscilaciones mecánicas

El ejemplo más sencillo de un sistema mecánico en el que se producen oscilaciones es un muelle o resorte del que cuelga verticalmente un objeto pesado (véase la figura 3.1). Supondremos que el objeto únicamente se mueve verticalmente sin torsión. El movimiento del objeto viene determinado por las diversas fuerzas que actúan sobre él. Entre estas están la fuerza de la gravedad, la fuerza recuperadora del muelle, la fuerza de amortiguación que ejerce el medio y, eventualmente, las fuerzas externas que actúan sobre el sistema. Vamos a analizar cada una de estas fuerzas y su efecto en el movimiento del objeto. Consideraremos que las fuerzas y los desplazamientos son positivos si están dirigidos hacia abajo y negativos en caso contrario. Además vamos a considerar como punto de referencia para medir el desplazamiento del muelle cuando se estira o se contrae la posición en que se encuentra su extremo inferior cuando no hay ningún objeto colgando de él. En este caso, al desplazamiento del extremo inferior del muelle respecto a ese punto de referencia lo vamos a denotar por x.

Fuerza de la gravedad. Si el objeto tiene masa m, la fuerza de la gravedad que actúa sobre él viene dado por

$$F_g = mg \tag{3.51}$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Como esta fuerza actúa hacia abajo es positiva.

Fuerza recuperadora. La fuerza que ejerce el muelle en oposición a cualquier fuerza que lo estira o contrae se denomina **fuerza de restitución o recuperadora**. Esta fuerza, que depende del desplazamiento, la vamos a denotar F_r. La **ley de Hooke** establece que la fuerza recuperadora es proporcional al desplazamiento. Así, si x es el desplazamiento del muelle

$$F_r(x) = -kx \tag{3.52}$$

donde k es una constante positiva que depende del material del que está hecho el resorte. Esta constante se denomina **constante de elasticidad** y mide el grado de elasticidad o rigidez del resorte. El signo negativo aparece porque la fuerza de restitución actúa en sentido opuesto al del desplazamiento del muelle.

Para determinar la constante k es suficiente con calcular el efecto que produce un cuerpo de masa m colgado del muelle. Cuando se cuelga un objeto del muelle este sufre un desplazamiento por efecto del peso del objeto que es contrarrestado por la fuerza recuperadora de manera que al cabo de un cierto tiempo el muelle queda parado en una posición de equilibrio. En este estado el muelle se habrá desplazado a una distancia x_0 como aparece en la figura 3.2. En la posición de equilibrio la fuerza recuperadora compensa la

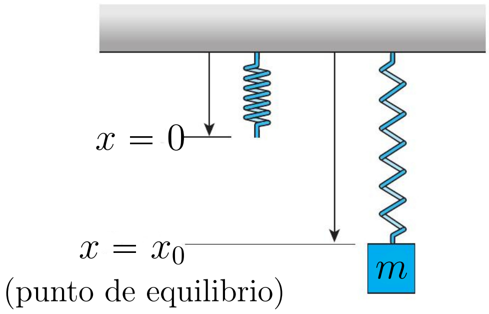


Figura 3.2: Punto de equilibrio de un muelle vertical

fuerza gravitatoria luego

$$F_r(x_0) + F_g = -kx_0 + mg = 0 \tag{3.53}$$

de donde se deduce que

$$k = \frac{mg}{x_0}. \tag{3.54}$$

Fuerza de amortiguamiento. En la práctica siempre existen fuerzas de fricción o rozamiento que ejercen una resistencia al movimiento del muelle. Esta fuerza, que denotaremos F_a, se conoce con el nombre de **fuerza de amortiguamiento**. Depende de diversos factores, principalmente de la velocidad del movimiento. Nosotros supondremos que la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad

$$F_a = -\mu v \tag{3.55}$$

donde $v = x'$ es la velocidad y μ es una constante positiva que se denomina **constante de amortiguamiento**. El signo negativo es debe a que esta fuerza actúa en sentido opuesto al del movimiento.

Fuerzas externas. Denotaremos por F_e cualquier otra fuerza externa que pueda actuar sobre el sistema.

Resumiendo lo anterior tenemos que la fuerza resultante F que actúa sobre el sistema es la suma de las cuatro fuerzas anteriores

$$F = F_g + F_r + F_a + F_e$$

que, aplicando la segunda ley de Newton y las expresiones de las distintas fuerzas que hemos visto antes, se transforma en la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx - \mu\frac{dx}{dt} + F_e(t). \tag{3.56}$$

De la ecuación (3.54) se deduce que $mg = -kx_0$, que sustituyendo en la ecuación precedente y reordenando los términos da

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + k(x - x_0) = F_e(t). \tag{3.57}$$

Si hacemos $y = x - x_0$, entonces y mide el desplazamiento del objeto desde el punto de equilibrio x_0. En esta nueva variable la ecuación (3.56) se convierte en

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{dy}{dt} + ky = F_e(t). \tag{3.58}$$

Esta ecuación modela el comportamiento de un resorte vertical del que cuelga un objeto pesado. Las distintas soluciones de esta ecuación, que dependerán de los valores de la masa del objeto, de las constantes k y μ y, obviamente, de las fuerzas externas, nos proporcionan, como todo modelo matemático, una descripción aproximada del comportamiento real del sistema estudiado que, para valores pequeños del desplazamiento y la velocidad iniciales, suele ser bastante adecuada en la mayoría de las situaciones.

El modelo también se aplica en el caso del sistema análogo en que el resorte se desplaza en posición horizontal (véase la figura 3.3). En este caso al enganchar un objeto al muelle este no se mueve de su posición de reposo porque ahora la fuerza de la gravedad no ejerce ninguna influencia en el

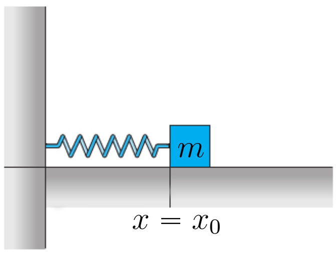


Figura 3.3: Muelle horizontal

movimiento del sistema, por lo que el punto de equilibrio es el punto $x_0 = 0$, y $x = y$. Si el objeto se mueve de su posición de reposo la fuerza resultante F

que actúa sobre el sistema en este caso es la suma únicamente de las fuerzas recuperadora, de amortiguamiento y externa:

$$F = F_r + F_a + F_e$$

que procediendo como antes nos conduce a la ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + kx = F_e(t). \tag{3.59}$$

3.6.1. Oscilaciones libres no amortiguadas

Cuando la constante de amortiguación μ es nula y no se aplica ninguna fuerza externa, el movimiento resultante se denomina **movimiento libre no amortiguado** o **movimiento armónico simple**. En este caso (3.58) se reduce a la ecuación

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0. \tag{3.60}$$

La ecuación característica de esta ecuación es

$$m\lambda^2 + k = 0$$

que tiene dos raíces complejas $\lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i$. Denotando $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, la solución general de la ecuación (3.60) es

$$y(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \operatorname{sen}\omega t. \tag{3.61}$$

Si y no es la solución trivial, eligiendo ϕ de manera que $0 \leqslant \phi < 2\pi$ y

$$\cos\phi = \frac{c_1}{A} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{c_2}{A},$$

donde

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \tag{3.62}$$

y sustituyendo en (3.61) se obtiene que

$$y(t) = A\cos\phi\cos\omega t + A\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\omega t,$$

que, haciendo uso de la fórmula del coseno de la diferencia, nos permite escribir y en la forma

$$y(t) = A\cos\left(\omega t - \phi\right). \tag{3.63}$$

Dado que la función coseno es periódica de periodo 2π las soluciones de la ecuación (3.60) son periódicas de periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{3.64}$$

Se denomina **frecuencia** de una función periódica al número de oscilaciones por unidad de tiempo, es decir al número de veces que la función toma un mismo valor en un periodo de tiempo unidad. La frecuencia es el valor inverso del periodo. La **frecuencia angular** es el número de oscilaciones medidas en radianes por unidad de tiempo, es decir es el producto de la frecuencia por 2π. En muchos textos se utiliza habitualmente la frecuencia angular en lugar de la frecuencia. En este caso se suele denominar simplemente frecuencia a la frecuencia angular. La frecuencia suele medirse en ciclos por segundo o hercios y la frecuencia angular en radianes por segundo. En el caso de la ecuación (3.60) sus soluciones tienen

$$\text{frecuencia} = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.65}$$

y

$$\text{frecuencia angular} = \frac{2\pi}{T} = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{3.66}$$

La frecuencia de las soluciones, como puede observarse, depende únicamente de las características físicas del sistema, en concreto de la masa m del objeto y de la constante k de elasticidad del resorte.

La constante A se denominan **amplitud** o **amplitud de la oscilación** y, como se ve inmediatamente a partir de (3.63), es el valor máximo que puede alcanzar $|y|$ y, por lo tanto, es el máximo desplazamiento, en uno u otro sentido, que puede alcanzar el resorte desde su punto de equilibrio. Dicho valor máximo se alcanza cuando

$$t = \frac{\phi + n\pi}{w}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

El número ϕ se denomina **ángulo fase** del sistema. La amplitud y el ángulo fase dependen sólo de las condiciones iniciales, posición y velocidad, del movimiento.

La gráfica de la solución (3.63) aparece representada en la figura 3.4.

Ejemplo 3.6.1. Un objeto de 32 N de peso[5] que cuelga de un muelle de acero de 10 cm de longitud produce un alargamiento del muelle de 0,25 cm. Se cambia el objeto que cuelga por otro de 1/2 kg de masa. Queremos determinar el movimiento resultante después de desplazar el objeto 0,25 cm hacia abajo y soltarlo con una velocidad de 1 cm/s también hacia abajo.

En primer lugar vamos a determinar la constante de elasticidad. Según hemos visto en (3.54)

$$k = \frac{mg}{x_0}$$

[5] El Newton (N) es la unidad métrica de fuerza. Es la fuerza que hay que aplicar a un 1 kg de masa para obtener una aceleración de 1 m/s^2. Por lo tanto un cuerpo que tiene una masa de 1 kg tiene un peso aproximado de 9,8 N.

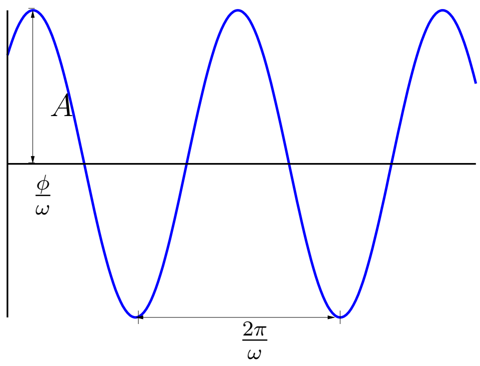


Figura 3.4: Movimiento armónico simple

luego

$$k = \frac{32 \text{ N}}{0{,}25 \text{ cm}} = 128 \text{ N/cm}.$$

Por lo visto más arriba, para determinar el movimiento del muelle con el nuevo objeto de masa $m = \frac{1}{2}$, hemos de resolver la ecuación

$$\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2} + 128y = 0.$$

La ecuación característica de esta ecuación es, quitando denominadores,

$$\lambda^2 + 256 = 0$$

que tiene dos raíces complejas $\lambda = \pm\sqrt{256}i = \pm 16i$. En consecuencia la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(t) = c_1 \cos 16t + c_2 \operatorname{sen} 16t.$$

Las condiciones iniciales son

$$y(0) = 0{,}25 = \frac{1}{4} \text{ cm}, \quad y'(0) = 1 \text{ cm/s}.$$

En consecuencia

$$\frac{1}{4} = y(0) = c_1, \quad 1 = y'(0) = 16c_2$$

y la ecuación del movimiento resultante es

$$y(t) = \frac{1}{4}\cos 16t + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 16t.$$

La amplitud es

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{16}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{16}.$$

El ángulo fase ϕ ha de verificar

$$\cos\phi = \frac{4}{\sqrt{17}}, \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

por lo que está en el primer cuadrante y además

$$\phi = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} \approx 0{,}2498 \text{ radianes.}$$

Haciendo uso de la amplitud y el ángulo fase la solución puede ser expresada en la forma

$$y(t) \approx \frac{\sqrt{17}}{16}\cos(16t - 0{,}2498).$$

El periodo de esta función es $\frac{\pi}{8}$ segundos y la frecuencia angular 16 radianes por segundo.

Ejemplo 3.6.2. Supongamos que tenemos un resorte situado en posición horizontal sujeto a un muro en su extremo izquierdo. Un cuerpo de masa $\frac{1}{2}$ kilogramo unido al extremo libre del resorte sufre un estiramiento de 2 metros cuando se le aplica una fuerza de 100 newtons. Queremos determinar la posición del objeto, suponiendo que no hay rozamiento, si inicialmente se encuentra a un metro de la posición de equilibrio y se suelta con una velocidad de 5 m/s en dirección al extremo fijo del resorte.

Para calcular la constante de elasticidad no nos podemos valer de la gravedad porque en este caso no tiene ningún efecto. Sin embargo, sabemos que si aplicamos una fuerza externa $F_e = 100$ N el resorte alcanza el equilibrio con un alargamiento de 2 metros

$$0 = F_e + F_a = 100 - 2k \quad \text{luego} \quad k = 50 \text{ N/m}.$$

La ecuación del movimiento en este caso es, quitando denominadores,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 100x = 0.$$

Argumentando como antes se llega a que $\omega = \sqrt{100} = 10$ y que la función de posición del resorte es

$$x(t) = c_1\cos 10t + c_2\operatorname{sen} 10t. \tag{3.67}$$

El periodo de la oscilación es

$$T = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}\text{s}$$

y la frecuencia

$$f = \frac{1}{T} = \frac{5}{\pi} \approx 1{,}59\text{Hz}.$$

Las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $x'(0) = -5$ sustituidas en (3.67) y su derivada nos dan que

$$c_1 = x(0) = 1, \quad 10c_2 = x'(0) = -5$$

luego la función de posición del objeto es

$$x(t) = \cos 10t - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,10t. \tag{3.68}$$

La amplitud es

$$A = \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\ \mathrm{m}.$$

El ángulo fase ϕ ha de verificar que

$$\cos\phi = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{y} \quad \mathrm{sen}\,\phi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

lo que nos dice que ϕ se encuentra en el cuarto cuadrante luego

$$\phi = 2\pi + \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 5{,}8195 \text{ radianes}.$$

La función x en la forma amplitud-fase de manera aproximada queda

$$x(t) \approx \frac{\sqrt{5}}{2}\cos(10t - 5{,}8195).$$

3.6.2. Oscilaciones libres amortiguadas

Seguimos suponiendo, como en el caso anterior, que no actúa ninguna fuerza exterior pero ahora consideramos que sí existe una fuerza de amortiguamiento. En este caso la ecuación (3.58) queda

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{dy}{dt} + ky = 0. \tag{3.69}$$

La ecuación característica de esta ecuación es

$$m\lambda^2 + \mu\lambda + k = 0. \tag{3.70}$$

La naturaleza de las raíces de esta ecuación, y por lo tanto la de las soluciones de la ecuación (3.69), depende del signo de $\Delta = \mu^2 - 4km$. Así, el sistema se dice que es

- **Sobreamortiguado** si $\Delta > 0$.
- **Críticamente amortiguado** si $\Delta = 0$.
- **Subamortiguado** si $\Delta < 0$.

Vamos a estudiar cada caso por separado.

Movimiento sobreamortiguado

Si $\Delta > 0$ las soluciones de la ecuación (3.70) son

$$\lambda_1 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4km}}{2m} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 4km}}{2m}$$

En consecuencia las soluciones de la ecuación diferencial (3.69) son

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{3.71}$$

Como λ_1 y λ_2 son números negativos $y(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$. En este caso no hay oscilaciones y la masa desplazada de la posición de equilibrio vuelve hacia la posición de equilibrio. Además la solución, si no es la trivial, pasa a lo sumo una vez por el punto de equilibrio.[6] En general, dependiendo de los valores de las condiciones iniciales, las gráficas de las soluciones no triviales de los sistemas sobreamortiguados son o bien de una de las tres formas que aparecen representadas en la figura 3.5 o bien de la de sus simétricas con respecto al eje t.

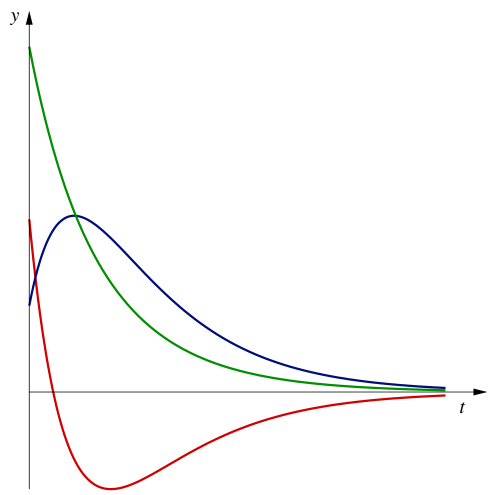


Figura 3.5: Movimiento sobreamortiguado

[6] Si la solución no es la solución trivial, $y(t)$ sólo puede ser cero si las constantes c_1 y c_2 son no nulas y de signos opuestos. En este caso el único valor para el que y se anula es

$$t = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \log\left(-\frac{c_2}{c_1}\right)$$

que es positivo sólo si $|c_2| > |c_1|$.

Movimiento críticamente amortiguado

En este caso la ecuación (3.70) tiene una única raíz doble $\lambda = -\frac{\mu}{2m}$. La solución general de la ecuación diferencial (3.69) es

$$y(t) = e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t). \tag{3.72}$$

Como la exponencial es positiva y el polinomio $c_1 + c_2 t$ tiene a lo sumo una raíz, si la solución no es la trivial el objeto pasa por la posición de equilibrio a lo sumo una vez. De hecho esto sólo ocurre si la raíz del polinomio $c_1 + c_2 t$, que es $t = -\frac{c_1}{c_2}$, es positiva, es decir si c_1 y c_2 tiene signos opuestos. También es evidente que no hay oscilaciones y que $y(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$. Las gráficas de las soluciones son semejantes a las del caso sobreamortiguado.

Movimiento subamortiguado

Este es el más interesante de los tres casos. Ahora las raíces de la ecuación característica (3.70) son de la forma $\lambda = \alpha + \omega i$ con

$$\alpha = \frac{-\mu}{2m} \quad \text{y} \quad \omega = \frac{\sqrt{4km - \mu^2}}{2m}.$$

En consecuencia la solución general de la ecuación (3.69) es

$$y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t)$$

que, operando como hicimos en 3.6.1, se puede poner en la forma

$$y(t) = Ae^{\alpha t} \cos(\omega t - \phi)$$

donde

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

y ϕ es tal que

$$\cos \phi = \frac{c_1}{A}, \quad \operatorname{sen} \phi = \frac{c_2}{A} \quad \text{y} \quad 0 \leqslant \phi < 2\pi.$$

Aunque el movimiento en realidad no es periódico, las soluciones sí tienen carácter oscilatorio. Podríamos decir que son oscilaciones amortiguadas ya que la amplitud de las oscilaciones no es constante sino que va decreciendo con el tiempo. Las gráficas de las soluciones están comprendidas entre las curvas $y(t) = -Ae^{\alpha t}$ e $y(t) = Ae^{\alpha t}$ y las toca de forma regular en los puntos de la forma

$$t = \frac{\phi + n\pi}{\omega}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Podemos entonces definir el **seudoperiodo** de la oscilación como

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{2m}{\sqrt{2km - \mu^2}}.$$

que es el intervalo de tiempo entre dos máximos o dos mínimos sucesivos. Estas soluciones pasan regularmente por el punto de equilibrio dos veces en cada seudoperiodo una en cada sentido. Por analogía con el caso armónico a

$$\omega = \frac{\sqrt{4km-\mu^2}}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\mu}{4m^2}}$$

se le denomina **seudofrecuencia** de la oscilación. Obsérvese que en este caso la seudofrecuencia es menor que la frecuencia que se tendría si no existiese la fuerza de amortiguación, que sería $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, y por lo tanto el seudoperiodo T_a es mayor que el periodo T de la oscilación sin amortiguación. Esto nos dice que la acción de la fuerza de amortiguamiento produce dos efectos, por un lado amortigua la amplitud de la oscilación y por otro ralentiza el movimiento disminuyendo su frecuencia. En la figura 3.6 aparece representada la gráfica de una solución típica de movimiento subamortiguado.

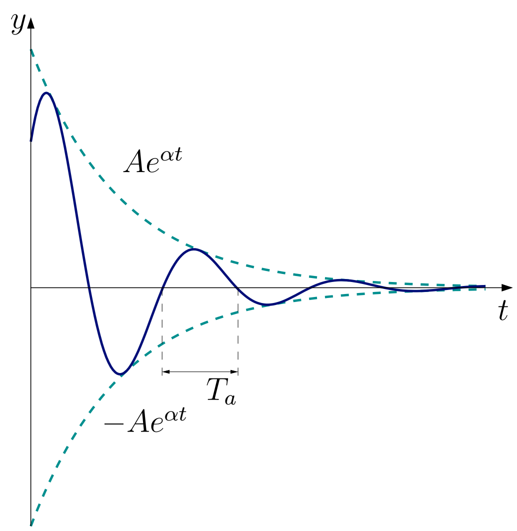


Figura 3.6: Movimiento subamortiguado

Ejemplo 3.6.3. Consideremos un objeto de masa 0,5 kg suspendido de un muelle con constante de elasticidad $k = 2$ N/cm. Supongamos que la constante de amortiguamiento es menor que 2 N·s/cm. Queremos estudiar el movimiento del objeto después de desplazarlo 1 cm hacia abajo y soltarlo.

La ecuación diferencial que describe este movimiento es

$$\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \tag{3.73}$$

y las condiciones iniciales son $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. La ecuación característica de (3.73) es

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + 4 = 0$$

que tiene dos raíces complejas $\lambda = -\mu \pm \sqrt{4-\mu^2}\, i$. En consecuencia la solución general de la ecuación (3.73) es

$$y(t) = e^{-\mu t}\Big[c_1 \cos\Big(\sqrt{4-\mu^2}\, t\Big) + c_2 \operatorname{sen}\Big(\sqrt{4-\mu^2}\, t\Big)\Big]. \tag{3.74}$$

Haciendo uso de las condiciones iniciales se obtiene que

$$1 = y(0) = c_1 \quad \text{y} \quad 0 = y'(0) = -\mu c_1 + \sqrt{4-\mu^2}\, c_2$$

de lo que se deduce que

$$c_1 = 1 \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{\mu}{\sqrt{4-\mu^2}}.$$

Sustituyendo estos valores en (3.74) se obtiene que

$$y(t) = e^{-\mu t}\Big[\cos\Big(\sqrt{4-\mu^2}\, t\Big) + \frac{\mu}{\sqrt{4-\mu^2}} \operatorname{sen}\Big(\sqrt{4-\mu^2}\, t\Big)\Big]. \tag{3.75}$$

La seudofrecuencia de y es

$$\omega = \sqrt{4-\mu^2}$$

y el seudoperiodo es

$$T_a = \frac{2\pi}{\sqrt{4-\mu^2}}.$$

Haciendo

$$A = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu}{\sqrt{4-\mu^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{4-\mu^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-\mu^2}}$$

y eligiendo ϕ tal que

$$\cos\phi = \frac{1}{A}, \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{\mu}{A\sqrt{4-\mu^2}} \quad \text{y} \quad 0 \leqslant \phi < 2\pi$$

la función y se puede poner en la forma

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{4-\mu^2}} e^{-\mu t} \cos(\sqrt{4-\mu^2}\, t - \phi). \tag{3.76}$$

En la figura 3.7 aparece representada la gráfica de la función (3.76) para $\mu = 0{,}1,\ 0{,}25,\ 1$ y $1{,}75$. Como puede observarse según va aumentando el valor de μ la amplitud va decreciendo y el seudoperiodo creciendo.

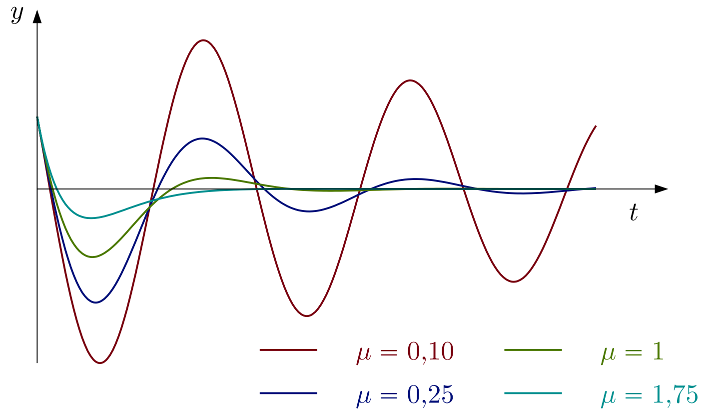


Figura 3.7: Gráfica de la función (3.76) para diversos valores de μ

3.6.3. Oscilaciones forzadas no amortiguadas

En esta sección y en la siguiente vamos a estudiar sistemas sobre los que actúa una fuerza externa, F_e, dependiente del tiempo. En nuestro estudio únicamente vamos a considerar fuerzas externas de la forma

$$F_e(t) = F_0 \cos \omega t \tag{3.77}$$

donde F_0 es una constante no nula.

Vamos a comenzar suponiendo que no hay fuerza de amortiguamiento. En este caso la ecuación (3.58) adopta la forma

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = F_0 \cos \omega t. \tag{3.78}$$

Sabemos que la solución general de la ecuación (3.78) es la superposición (la suma) de una solución particular y_p de la ecuación y la solución general y_h de la ecuación homogénea asociada. Esta última es la ecuación del movimiento libre no amortiguado que hemos visto en 3.6.1 que tiene solución general

$$y_h(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right). \tag{3.79}$$

Para hallar y_p vamos a utilizar el método de los coeficientes indeterminados. Para ello hemos de considerar dos casos según que la función F_e sea o no solución de la ecuación homogénea asociada. Esto depende de que la frecuencia angular de F_e, ω, coincida o no con la frecuencia correspondiente al movimiento libre del sistema, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. A esta última se le denomina **frecuencia (angular) natural** del sistema.

Frecuencia de la fuerza de entrada distinta de la frecuencia natural

En este caso vamos a buscar una solución particular de la ecuación (3.60) de la forma

$$y_p(t) = a\cos\omega t + b\operatorname{sen}\omega t. \tag{3.80}$$

Sustituyendo esta función en la ecuación diferencial se tiene que

$$-m\omega^2(a\cos\omega t + b\operatorname{sen}\omega t) + k(a\cos\omega t + b\operatorname{sen}\omega t) = F_0\cos\omega t$$

que igualando coeficientes da

$$\begin{aligned} -ma\omega^2 + ka =& F_0 \\ -mb\omega^2 + kb =& 0 \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$a = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} \quad \text{y} \quad b = 0.$$

En consecuencia la solución particular buscada es

$$y_p(t) = \frac{F_0}{k - m\omega^2}\cos\omega t. \tag{3.81}$$

La solución general de la ecuación (3.78) es

$$y(t) = \frac{F_0}{k - m\omega^2}\cos\omega t + c_1\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \tag{3.82}$$

donde las constantes c_1 y c_2 están determinadas por los valores iniciales $y(0)$ e $y'(0)$. Esta solución es la superposición de dos oscilaciones, una que es la correspondiente al movimiento libre, que tiene como frecuencia angular la frecuencia natural del sistema, y la otra con la misma frecuencia que la fuerza externa.

Ejemplo 3.6.4. Consideremos un resorte con coeficiente de elasticidad $k = 9$ del que cuelga un cuerpo de masa $m = 1$. Queremos determinar la respuesta (la solución) del correspondiente sistema si está sometido a una fuerza exterior $F_e(t) = 80\cos 5t$ supuesto que $y(0) = y'(0) = 0$.

La ecuación del movimiento en este caso es

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 9y = 80\cos 5t. \tag{3.83}$$

La frecuencia natural es

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 3$$

y la frecuencia de la fuerza externa es $\omega = 5$. Como ambas frecuencias son distintas estamos en las condiciones de la discusión precedente. Repitiendo los razonamientos anteriores se llega a que

$$y_p(t) = \frac{80}{9-25}\cos 5t = -5\cos 5t.$$

En consecuencia la solución general de la ecuación (3.83) es

$$y(t) = -5\cos 5t + c_1\cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t. \tag{3.84}$$

Las condiciones iniciales implican que

$$0 = y(0) = c_1 - 5 \quad \text{y} \quad 0 = y'(0) = 3c_2$$

luego $c_1 = 5$ y $c_2 = 0$. En consecuencia la solución de nuestro problema es

$$y(t) = 5\cos 3t - 5\cos 5t. \tag{3.85}$$

En este caso la solución es periódica de periodo 2π. En la figura 3.8 aparece

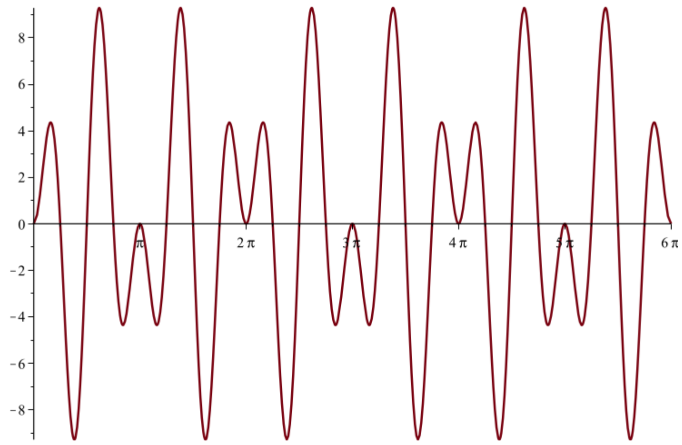


Figura 3.8: Gráfica de la función (3.85)

representada la gráfica de la función (3.85).

Vamos a estudiar ahora un fenómeno interesante que aparece en algunas situaciones cuando los valores de las frecuencias son próximos. Supongamos que $y(0) = y'(0) = 0$. Sustituyendo en (3.82) se tiene que

$$0 = y(0) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} + c_1 \quad \text{y} \quad 0 = y'(0) = c_2\omega_0$$

luego

$$c_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \text{y} \quad c_2 = 0$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t - \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega_0 t \\
&= \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t).
\end{aligned}
\tag{3.86}
$$

Haciendo uso de la formula de la diferencia de cosenos podemos expresar la función anterior como

$$
y(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \text{ sen } \frac{1}{2}(\omega_0-\omega)t \text{ sen } \frac{1}{2}(\omega_0+\omega)t. \tag{3.87}
$$

Si los valores de las frecuencias son próximos $\omega + w_0$ es muy grande en comparación con $|\omega_0 - \omega|$ por lo que los valores de sen $\frac{1}{2}(\omega_0+\omega)t$ cambian muy rápidamente mientras que por el contrario los valores de sen $\frac{1}{2}(\omega_0-\omega)t$ lo hacen muy despacio. Podemos interpretar entonces la ecuación (3.87) como una oscilación con frecuencia angular $\frac{1}{2}(\omega_0+\omega)$,

$$
y(t) = A(t) \,\text{sen}\, \frac{1}{2}(\omega_0+\omega)\, t \tag{3.88}
$$

pero con una amplitud variable lenta,

$$
A(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \text{ sen } \frac{1}{2}(\omega_0-\omega)t.
$$

Este fenómeno se conoce con el nombre de **batimiento**.[7]

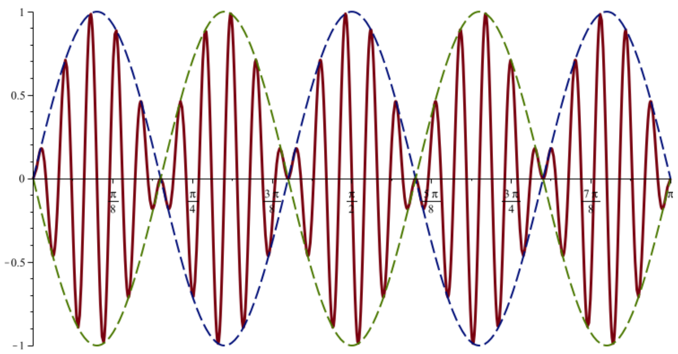


Figura 3.9: El fenómeno de batimiento. Las gráficas discontinuas corresponden a la amplitud y su opuesta

[7] En Física se define el batimiento como la variación periódica en amplitud debida a la superposición de dos ondas que tienen frecuencias ligeramente diferentes.

Debido a que la intensidad del sonido es proporcional al cuadrado de la amplitud, el sonido es más fuerte siempre que la función de amplitud es o bien un máximo o un mínimo. Cuando hay batimiento esto se produce dos veces en cada periodo de la onda envolvente

Frecuencia de la fuerza exterior igual a la frecuencia natural

Si $\omega = \omega_0$ la fuerza externa es solución de la ecuación homogénea asociada. Para aplicar el método de los coeficientes indeterminados hay que buscar soluciones de la forma

$$y_p(t) = t(a\cos\omega t + b \operatorname{sen}\omega t). \tag{3.89}$$

El término entre paréntesis es una función y_1 que es solución de la ecuación homogénea asociada. Teniendo esto en cuenta, sustituyendo en la ecuación (3.78) se tiene que

$$m(2y_1' + ty'') + kty_1 = 2my_1' = F_0\cos\omega t$$

o lo que es lo mismo

$$2m(-a\omega \operatorname{sen}\omega t + b\omega\cos\omega t) = F_0\cos\omega t$$

que igualando los coeficientes de los términos en coseno y en seno da

$$2mb\omega = F_0 \quad \text{y} \quad -2ma\omega = 0$$

de donde se concluye que

$$a = 0 \quad \text{y} \quad b = \frac{F_0}{2m\omega}.$$

En consecuencia

$$y_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega}\, t \operatorname{sen}\omega t \tag{3.90}$$

y la solución general de la ecuación (3.78) es

$$y(t) = \frac{F_0}{2m\omega}\, t \operatorname{sen}\omega t + c_1\cos\omega t + c_2 \operatorname{sen}\omega t. \tag{3.91}$$

La solución particular y_p es particularmente interesante porque ilustra el fenómeno conocido como **resonancia**. En este caso la amplitud variable de la oscilación

$$\frac{F_0}{2m\omega}\, t \operatorname{sen}\omega t$$

---

o, lo que es lo mismo, con una frecuencia igual a la diferencia de las frecuencias de las dos ondas. Si esta frecuencia es inferior a 15 o 20 ciclos por segundo el oído es capaz de distinguir estas fluctuaciones de volumen, para frecuencias superiores las fluctuaciones son demasiado rápidas para distinguirlas.

Este fenómeno es a menudo utilizado para comparar una frecuencia desconocida con otra conocida. Por ejemplo, para afinar un piano con la ayuda de un diapasón, el afinador presiona una tecla y simultáneamente hace sonar el diapasón mientras ajusta la tensión de la cuerda del piano para modificar su frecuencia hasta que las fluctuaciones sonoras producidas por los batimientos aparecen muy separadas lo que indica que la diferencia de las frecuencias de los sonidos es muy pequeña.

crece de manera proporcional al tiempo, lo que hace que la solución sea una oscilación no acotada.[8] La gráfica de la función (3.90) aparece representada en la figura 3.10 junto con las rectas

$$y = \pm \frac{F_0}{2m\omega} t$$

que aparecen representadas con trazo discontinuo.

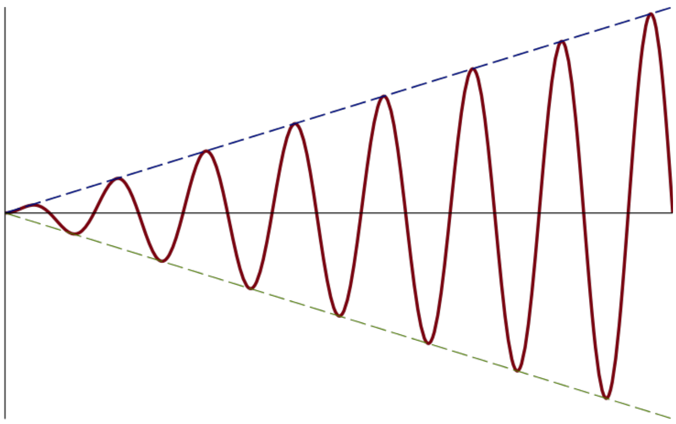


Figura 3.10: Resonancia no amortiguada

Ejemplo 3.6.5. Supongamos que un objeto de masa 1 kg cuelga de un muelle de coeficiente de elasticidad 1 N/m y que se somete el sistema a una fuerza externa $F_e(t) = \cos t$ N. Queremos determinar la respuesta del sistema si en el instante inicial está parado y en equilibrio.

La ecuación del sistema es

$$y'' + y = \cos t \tag{3.92}$$

[8]El fenómeno de la resonancia aparece en situaciones muy variadas teniendo en ocasiones consecuencias desastrosas y siendo utilizado con provecho en otras.

Un ejemplo espectacular de los efectos de la resonancia se tiene cuando una cantante rompe una copa de cristal con su voz amplificada. Si la cantante emite con potencia una nota con una frecuencia exactamente igual a una de las frecuencias naturales de vibración de la copa, se pueden crear oscilaciones de gran amplitud que pueden llegar a romper el cristal.

Los puentes proporcionan numerosos ejemplos de los efectos de la resonancia. Un ejemplo clásico es el derrumbamiento en el año 1831 del puente de Broughton en Inglaterra tras el paso de un grupo de 60 soldados marcando el paso con una frecuencia coincidente con una de las frecuencias naturales del puente. Otro caso análogo sucedió en el Pont de la Basse-Chaîne en Angers (Francia) en 1850 causando la muerte de más de 200 soldados. Por este motivo se ordena que las formaciones militares rompan el paso antes de atravesar un puente (véase la figura 3.11).

La resonancia se puede emplear, por otro lado, para amplificar señales débiles. En los antiguos receptores de radio este procedimiento era empleado para amplificar la señal de la emisora que se deseaba oír, poniendo en resonancia la frecuencia del aparato con la de la señal de dicha emisora.

Figura 3.11: Aviso a la entrada del Albert Bridge en Londres

y las condiciones iniciales son $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

Como la ecuación característica de la ecuación homogénea asociada es

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

que tiene dos soluciones imaginarias puras $\lambda = \pm i$, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t.$$

Si, aplicando el método de los coeficientes indeterminados, buscamos una solución particular de la ecuación (3.92) de la forma

$$y_p(t) = t(a \cos t + b \operatorname{sen} t),$$

sustituyendo en (3.92) se obtiene que

$$2(-a \operatorname{sen} t + b \cos t) - t(a \cos t + b \operatorname{sen} t) + t(a \cos t + b \operatorname{sen} t) = \cos t$$

o

$$2(-a \operatorname{sen} t + b \cos t) = \cos t$$

que igualando los coeficientes de los términos en senos y cosenos da $a = 0$ y $b = \frac{1}{2}$. En consecuencia

$$y_p(t) = \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t$$

y la solución general de (3.92) es

$$y(t) = \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t + c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t.$$

Tomando en consideración las condiciones iniciales se llega a que

$$0 = y(0) = c_1 \quad \text{y} \quad 0 = y'(0) = c_2.$$

Así que en este caso la solución del problema de valor inicial coincide con la solución particular que hemos obtenido.

3.6.4. Oscilaciones forzadas amortiguadas

En los sistemas físicos reales siempre hay una fuerza de amortiguamiento aunque sea muy pequeña. En este caso la ecuación del movimiento es de la forma

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + \mu\frac{dy}{dt} + ky = F_0 \cos \omega t \tag{3.93}$$

con $\mu > 0$. La solución general de esta ecuación es de la forma

$$y = y_p + y_h$$

donde y_p es una solución particular de (3.93) e y_h es una solución de la ecuación homogénea asociada. Esta última ecuación corresponde a un movimiento libre no amortiguado que, según vimos en 3.6.2, tiene diferente solución según el movimiento sea sobreamortiguado, subamortiguado o críticamente amortiguado. En cualquiera de los tres casos vimos que las correspondientes soluciones tienden a 0 cuando t tendía a infinito. Esto nos dice que la componente y_h de la solución es una componente transitoria. Como las condiciones iniciales determinan y_h, se concluye de lo anterior que con el tiempo el efecto de las condiciones iniciales va desapareciendo y la respuesta del sistema está determinada casi completamente por la fuerza externa aplicada.

Como $\mu > 0$ la fuerza externa no es solución de la ecuación homogénea asociada por lo que, aplicando el método de los coeficientes indeterminados, se sabe que la ecuación (3.93) tiene una solución particular de la forma

$$y_p(t) = a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t.$$

Sustituyendo esta función en la ecuación se tiene que

$$\begin{aligned} -m\omega^2(a\cos\omega t + b\operatorname{sen}\omega t) + \mu\omega(-a\operatorname{sen}\omega t + b\cos\omega t) \\ + k(a\cos\omega t + b\operatorname{sen}\omega t) = F_0\cos\omega t \end{aligned}$$

e igualando los términos en coseno y en seno se llega a que

$$\begin{aligned} (k - m\omega^2)a + \mu\omega b =& F_0 \\ -\mu\omega a + (k - m\omega^2)b =& 0 \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$a = \frac{(k - m\omega^2)F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (\mu\omega)^2} \quad \text{y} \quad b = \frac{\mu\omega F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (\mu\omega)^2}.$$

Por lo tanto, una solución particular de la ecuación (3.93) es

$$y_p(t) = \frac{F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (\mu\omega)^2}\left((k - m\omega^2)\cos\omega t + \mu\omega \operatorname{sen}\omega t\right). \tag{3.94}$$

Poniendo

$$A(\omega) = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\mu\omega)^2}} \tag{3.95}$$

y eligiendo ϕ de manera que, $0 \leqslant \phi < 2\pi$ y

$$\cos\phi = \frac{k - m\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\mu\omega)^2}}, \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{\mu\omega}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\mu\omega)^2}} \tag{3.96}$$

la función y_p se puede escribir también en la forma

$$y_p(t) = A(\omega)\cos(\omega t - \phi) \tag{3.97}$$

o

$$y_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\mu\omega)^2}}\cos(\omega t - \phi). \tag{3.98}$$

La amplitud de esta solución,

$$A(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\mu\omega)^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\mu\omega)^2}}, \tag{3.99}$$

a diferencia del caso no amortiguado, es una función acotada de ω. El valor máximo de $A(\omega)$ se alcanza cuando el valor de

$$m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\mu\omega)^2 \tag{3.100}$$

es mínimo. Desarrollando y completando cuadrados se verifica que

$$m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\mu\omega)^2 = \left(m\omega^2 + \frac{\mu^2 - 2m^2\omega_0^2}{2m}\right)^2 + m^2\omega_0^4 - \left(\frac{\mu^2 - 2m^2\omega_0^2}{2m}\right)^2$$

de donde se deduce que el valor mínimo de (3.100) se alcanza cuando

$$\left(m\omega^2 + \frac{\mu^2 - 2m^2\omega_0^2}{2m}\right)^2$$

es mínimo, lo que ocurre cuando $\omega = 0$ si $\mu^2 - 2m^2\omega_0^2 \geqslant 0$ o cuando

$$\omega = \sqrt{\frac{2m^2\omega_0^2 - \mu^2}{2m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\mu^2}{2m^2}} \tag{3.101}$$

si $\mu^2 - 2m^2\omega_0^2 < 0$. Esto nos dice que cuando $\mu \geqslant \sqrt{2}m\omega_0 = \sqrt{2km}$, es decir cuando el sistema esta sobreamortiguado o críticamente amortiguado, la función A alcanza su máximo cuando $\omega = 0$ y luego decrece. En cambio cuando $\mu < \sqrt{2}m\omega_0 = \sqrt{2km}$, es decir cuando el sistema está subamortiguado, la amplitud alcanza su máximo para el valor (3.101) y luego tiende a 0 cuando ω tiende a infinito. Cuando el sistema está subamortiguado y la frecuencia de la fuerza externa es (3.101), que es la que proporciona la respuesta de amplitud máxima, se dice que el sistema está en **resonancia práctica** y al valor (3.101) de ω se le denomina **frecuencia de resonancia o resonante**.

Ejemplo 3.6.6. Un objeto de masa 1 g pende de un resorte que tiene una constante de elasticidad de 50 g/s^2 y un coeficiente de amortiguamiento de 2 g/s. El objeto se desplaza hacia abajo $\frac{23}{26}$ cm y se suelta con una velocidad de $28 + \frac{2}{13}$ cm/s en la misma dirección. Sobre el objeto actúa una fuerza de $41\cos 2t$ dinas.[9] Queremos determinar el movimiento resultante.

La ecuación diferencial que rige este movimiento es

$$y'' + 2y' + 50y = 41\cos 2t \tag{3.102}$$

y las condiciones iniciales son

$$y(0) = \frac{23}{26}, \qquad y'(0) = 28 + \frac{2}{13}. \tag{3.103}$$

La ecuación característica de la ecuación homogénea asociada es

$$\lambda^2 + 2\lambda + 50 = 0$$

que tiene dos soluciones

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{50 - 1}i = -1 \pm 7i.$$

En consecuencia la solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$y_h(t) = e^{-t}(c_1 \cos 7t + c_2 \operatorname{sen} 7t). \tag{3.104}$$

Para obtener una solución particular de la ecuación (3.102) aplicamos el método de variación de las constantes que nos dice que la ecuación tiene una solución particular de la forma

$$y_p(t) = a\cos 2t + b\operatorname{sen} 2t.$$

Sustituyendo en la ecuación se obtiene que

$$\begin{aligned} &- 4(a\cos 2t + b\operatorname{sen} 2t) + 4(-a\operatorname{sen} 2t + b\cos 2t) + \\ &\qquad\qquad + 50(a\cos 2t + b\operatorname{sen} 2t) = 41\cos 2t. \end{aligned}$$

[9] Una dina es una unidad de fuerza que equivale a la fuerza necesaria para mover la masa de un gramo a razón de un centímetro por segundo cada segundo.

e igualando los coeficientes de los términos en coseno y seno

$$\begin{aligned} 46a + \ 4b &= 41 \\ -4a + 46b &= 0 \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$a = \frac{41 \times 46}{46^2 + 16} = \frac{23}{26}, \qquad b = \frac{164}{46^2 + 16} = \frac{1}{13}$$

y, por tanto,

$$y_p(t) = \frac{23}{26} \cos 2t + \frac{1}{13} \operatorname{sen} 2t.$$

En consecuencia la solución general de (3.102) es

$$y(t) = \frac{23}{26} \cos 2t + \frac{1}{13} \operatorname{sen} 2t + e^{-t}(c_1 \cos 7t + c_2 \operatorname{sen} 7t). \tag{3.105}$$

Haciendo uso de la condiciones iniciales (3.103) se llega a que

$$\begin{aligned} \frac{23}{26} &= y(0) = \frac{23}{26} + c_1 \\ 28 + \frac{2}{13} &= y'(0) = \frac{2}{13} - c_1 + 7c_2 \end{aligned}$$

de donde se obtienen los valores de las constantes $c_1 = 0$ y $c_2 = 4$, que sustituidos en (3.105) nos dan que

$$y(t) = \frac{23}{26} \cos 2t + \frac{1}{13} \operatorname{sen} 2t + 4e^{-t} \operatorname{sen} 7t. \tag{3.106}$$

La amplitud de la solución de la parte estable es

$$A = \sqrt{\left(\frac{23}{26}\right)^2 + \left(\frac{1}{13}\right)^2} = \frac{23^2 + 4}{26^2} = \sqrt{\frac{51}{56}}$$

y ángulo fase ϕ tal que $0 < \phi < \pi$ y

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{2}{23}.$$

Haciendo uso de estos valores podemos poner la función y en la forma

$$y(t) = \sqrt{\frac{51}{56}} \cos(2t - \phi) + 4e^{-t} \operatorname{sen} 7t. \tag{3.107}$$

Obsérvese que la parte estable es periódica con el mismo periodo que la fuerza externa.

El sistema es subamortiguado y la frecuencia de la fuerza externa, 2, es bastante menor que la frecuencia de resonancia del sistema que es

$$\sqrt{50 - 2} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}928.$$

3.7. Circuitos eléctricos

Todo movimiento de carga eléctrica de una región a otra se denomina corriente eléctrica. Cuando ese desplazamiento tiene lugar a lo largo de una trayectoria cerrada dicha trayectoria recibe el nombre de circuito eléctrico. Los circuitos eléctricos están formados por conductores conectados entre sí por los que circula la corriente eléctrica. Para que esta fluya es necesario que exista una fuerza electromotriz. Esta es la cantidad de energía por unidad de carga que se suministra al sistema.

En cada punto de un circuito eléctrico hay dos magnitudes fundamentales en el estudio de las corrientes eléctricas: el voltaje (o potencial) y la intensidad (o flujo de carga). La unidad de medida del potencial es el voltio y la de intensidad el amperio. Una **rama** de un circuito es una parte de este con dos terminales a las que se pueden conectar otras ramas. Un **nodo** es un punto donde se unen dos o más ramas y un **bucle** es una trayectoria cerrada formada por diversas ramas conectadas.

En la exposición que sigue únicamente vamos a considerar circuitos eléctricos constituidos por dispositivos de los siguientes cuatro tipos básicos.

Fuente de fuerza electromotriz. Es un dispositivo que provee de fuerza electromotriz al circuito. Convierte energía mecánica, química, térmica etc. en energía potencial eléctrica y la transfiere al circuito al que esta conectado el dispositivo. Algunos ejemplos de fuentes de fuerza electromotriz son las baterías, las dinamos, los generadores eléctricos, los acumuladores, las placas solares etc. Se suele denotar con la letra $\mathcal{E}$ y su unidad es la misma que la del potencial, el voltio.

Resistencia. También se emplea el término **resistor**. Es un elemento que se opone a la corriente eléctrica produciendo como consecuencia una caída de potencial. La razón entre la diferencia de potencial V_R y la intensidad de la corriente i en un conductor es una función del tiempo, R, que se denomina **resistencia**. En muchos materiales, en especial metálicos, a una temperatura dada la resistencia es constante por lo que la diferencia de potencial es directamente proporcional a la intensidad de la corriente y satisfacen lo que se conoce como **Ley de Ohm**:

$$V_R = iR \tag{3.108}$$

El valor de la función R se mide en ohmios. Un ohmio es la resistencia que produce una caída de potencial de un voltio si la corriente tiene una intensidad de un amperio.

Condensador. Los condensadores son dispositivos que se emplean para almacenar energía. Están formados por dos conductores separados por un aislante. Los dos conductores tienen carga de igual magnitud y signo contrario de manera que la carga neta en el condensador en su conjunto permanece igual a 0. La carga Q del conductor de carga positiva se dice que es la carga del condensador o la carga que está almacenada en el condensador.

El campo eléctrico en cualquier punto de la región entre los conductores es proporcional a la magnitud Q de carga del conductor. Por lo tanto la diferencia de potencial V_C entre los conductores también es proporcional a Q,

$$V_C = \frac{1}{C}\,Q. \tag{3.109}$$

A la razón C entre la carga y la diferencia de potencial se le denomina **capacidad eléctrica**, o **capacitancia**, del condensador. La unidad de carga eléctrica es el culombio y la de capacidad es el faradio que es la capacidad de un conductor que con una carga de un culombio adquiere el potencial de un voltio.

Teniendo en cuenta que la intensidad es la tasa de variación de la carga con respecto al tiempo

$$i = \frac{dQ}{dt}, \tag{3.110}$$

si la capacidad es constante, derivando en (3.109), y utilizando (3.110), se obtiene la ecuación

$$i = C\,\frac{dV_C}{dt}. \tag{3.111}$$

Inductor. También se denomina bobina de autoinducción o simplemente autoinducción. Cuando en un circuito eléctrico hay presente una corriente, se establece un campo magnético que crea un flujo magnético a través del mismo circuito que cambia cuando la corriente cambia. Así, cualquier circuito que conduzca una corriente variable tiene una fuerza electromotriz inducida por él mismo por la variación en su propio campo magnético. Esta clase de fuerza electromotriz se denomina **autoinducida**. Una fuerza electromotriz autoinducida siempre se opone al cambio en la corriente que la causó. Como consecuencia de la **ley de Faraday** se deduce que una fuerza electromotriz autoinducida $\mathcal{E}_L$ siempre es proporcional a la tasa de cambio de la intensidad de la fuente con respecto del tiempo

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{di}{dt} \tag{3.112}$$

donde L es una constante de proporcionalidad, denominada **autoinductancia**, o simplemente **inductancia**, del circuito. La unidad de inductancia es el henrio que es la la inductancia de un circuito cerrado en el que se produce una fuerza electromotriz de un voltio cuando la corriente eléctrica varía uniformemente a razón de un amperio por segundo

Un **inductor** es un elemento de un circuito con una gran autoinductancia. Su finalidad es oponerse a cualquier variación en la corriente a través del circuito, produciendo una caída de voltaje V_L dada por

$$V_L = L\frac{di}{dt}. \tag{3.113}$$

Las leyes que rigen el comportamiento de la corriente eléctrica en un circuito se conocen con el nombre de **leyes de Kirchhoff**:

I) La suma de las intensidades que entran en un nodo en un instante determinado es cero.

II) La suma de las fuerzas electromotrices alrededor de un bucle en un instante determinado es igual a la suma de las caídas de voltaje.

Para aplicar estas leyes adecuadamente es necesario asignar un sentido de recorrido positivo. Con esta asignación las intensidades de corriente que entran en el nodo se consideran que tienen signo opuesto al de las corrientes que salen del nodo. Ya que las cargas se mueven del extremo de mayor potencial al de menor, si se recorre una resistencia, un condensador o un inductor en la dirección de la corriente las caídas de voltaje se suman, si se recorren en sentido contrario se restan. Lo contrario se verifica para una fuente de fuerza electromotriz porque en este caso se produce una ganancia de voltaje, es decir una caída de voltaje negativa.

Vamos a examinar un circuito con los elementos indicados anteriormente instalados en serie (véase la figura 3.12). Supondremos que la resistencia

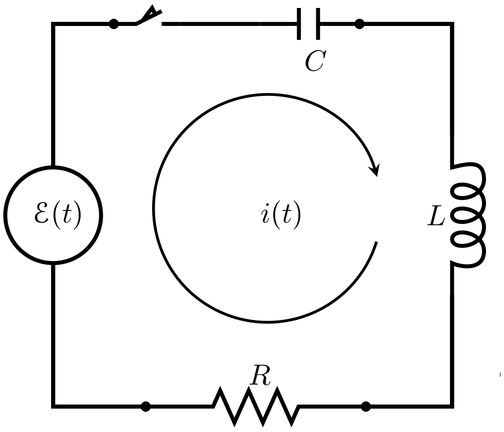


Figura 3.12: Circuito eléctrico

del resistor es de R ohmios, que el inductor tiene una inductancia de L henrios, el condensador una capacidad de C faradios y que la fuente de fuerza electromotriz proporciona, en el instante t, un potencial de $\mathcal{E}(t)$ voltios. Supondremos además que el circuito posee un interruptor que no deja pasar la corriente cuando está abierto.

Al cerrar el interruptor la corriente recorre el circuito con una intensidad que, de acuerdo con la ley de Kirchhoff de las intensidades, es la misma en las cuatro ramas del circuito (en la figura 3.12 los nodos del circuito están indicados con un punto). Denotaremos por $i(t)$ a dicha intensidad, medida en amperios, en el instante t. Esta corriente produce una carga de $Q(t)$ culombios en el condensador. La ley de Kirchhoff de los potenciales nos dice que

$$\mathcal{E}(t) = V_C + V_L + V_R$$

que aplicando las ecuaciones (3.109), (3.113) y (3.108) nos da la ecuación

$$\mathcal{E}(t) = \frac{Q}{C} + L\frac{di}{dt} + Ri.$$

que satisfacen la intensidad y la carga del circuito. Sustituyendo (3.110) en esta ecuación se obtiene la ecuación diferencial lineal de segundo orden en Q:

$$L\,\frac{d^2Q}{dt^2} + R\,\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}\,Q = \mathcal{E}(t). \tag{3.114}$$

Para obtener la intensidad es suficiente aplicar (3.110). Alternativamente, derivando la ecuación (3.114) y reemplazando Q' por i obtenemos la ecuación diferencial de segundo orden

$$L\,\frac{d^2i}{dt^2} + R\,\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\,i = \mathcal{E}'(t) \tag{3.115}$$

que nos permite obtener directamente la intensidad de la corriente.

Las ecuaciones anteriores, conocidas las correspondientes condiciones iniciales, nos permiten determinar completamente la carga y la intensidad en el circuito. Habitualmente, sin embargo, sólo se suelen conocer las condiciones en el instante $t = 0$ de i, y Q, por lo que si únicamente estamos interesados en conocer la intensidad y queremos aplicar la ecuación (3.115) hemos de calcular $i'(0)$. Teniendo en cuenta que $Q' = i$, esto se puede hacer particularizando la ecuación (3.114) en $t = 0$, lo que nos lleva a la ecuación

$$L\,\frac{di}{dt}(0) + R\,i(0) + \frac{1}{C}\,Q(0) = \mathcal{E}(0) \tag{3.116}$$

de donde se puede obtener $i'(0)$.

Ejemplo 3.7.1. Consideremos un circuito como el de la figura 3.12 alimentado por una batería de 1,5 voltios, con un resistor con una resistencia de 2 ohmios, un condensador de 2 faradios de capacidad y un inductor con una inductancia de 1 henrio. Supongamos que inicialmente la carga en el condensador es de 2 culombios y que la intensidad de la corriente en la resistencia es de 4 amperios.

En este caso la ecuación (3.115) adopta la forma

$$i'' + 2i' + \frac{1}{2}i = 0. \tag{3.117}$$

La ecuación característica de la ecuación es

$$\lambda^2 + 2\lambda + \frac{1}{2} = 0$$

que tiene dos raíces

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = -1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

En consecuencia la solución general de la ecuación (3.117) es

$$i(t) = e^{-t}\Big(c_1 e^{\sqrt{\frac{1}{2}}t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}t}\Big). \tag{3.118}$$

Como $i(0) = 4$ y $Q(0) = 2$, sustituyendo en (3.116) se obtiene que

$$i'(0) + 2i(0) + \frac{1}{2}Q(0) = i'(0) + 9 = 1{,}5$$

luego $i'(0) = -7{,}5$. Reemplazando los valores de $i(0)$ e $i'(0)$ en la expresión (3.118) particularizada en $t = 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 4 \\ \Big(-1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\Big)c_1 + \Big(-1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\Big)c_2 &= -7{,}5 \end{aligned}$$

luego

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -7{,}5 & -1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 + \sqrt{\frac{1}{2}} & -1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \end{vmatrix}} = \frac{-4 - 2\sqrt{2} + 7{,}5}{-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - 3{,}5}{\sqrt{2}}$$

y

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 + \sqrt{\frac{1}{2}} & -7{,}5 \end{vmatrix}}{-\sqrt{2}} = \frac{7{,}5 - 4 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3{,}5 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

En consecuencia la intensidad de la corriente en el circuito es

$$i(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t}\Big((2\sqrt{2} - 3{,}5)e^{\sqrt{\frac{1}{2}}t} + ((2\sqrt{2} + 3{,}5)e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}t}\Big).$$

Obsérvese que cuando t tiende a infinito la intensidad $i(t)$ tiende a 0, como era de esperar.

La carga Q se puede obtener integrando i:

$$Q(t) = \int_0^t i(s)\,ds + Q(0) = e^{-t}\Big(\frac{2\sqrt{2} - 3{,}5}{1 - \sqrt{2}} e^{\sqrt{\frac{1}{2}}t} - \frac{2\sqrt{2} + 3{,}5}{1 + \sqrt{2}} e^{-\sqrt{\frac{1}{2}}t}\Big) + 2.$$

En el ejemplo anterior el circuito tenía como fuente de fuerza electromotriz una batería que proporcionaba una corriente constante. Vamos a analizar ahora otro tipo de circuitos, que aparecen frecuentemente en la práctica,[10] en los que la fuente de alimentación proporciona una fuerza electromotriz no constante que varía de forma periódica. Estos son los denominados circuitos de corriente alterna.

Se denomina fuente de corriente alterna a cualquier dispositivo que suministre un voltaje o una corriente que varíe en forma sinusoidal. El voltaje $\mathcal{E}$ suministrado por una fuente de corriente alterna viene dada por una función de la forma

$$\mathcal{E}(t) = E_0 \operatorname{sen} \omega t. \tag{3.119}$$

donde ω es un número, que supondremos positivo.[11] El valor $|E_0|$ que aparece en la expresión anterior se denomina amplitud de voltaje y es el valor máximo que puede alcanzar el voltaje aplicado. En este caso la ecuación diferencial (3.116) toma la forma

$$L\,\frac{d^2 i}{dt^2} + R\,\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\,i = \omega E_0 \cos \omega t. \tag{3.120}$$

La solución de esta ecuación es la suma de una solución particular, i_p, de la ecuación y una solución, i_h, de la ecuación homogénea asociada. La ecuación característica de esta última es

$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$$

que tiene raíces

$$\lambda = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L}$$

si $R^2 - \dfrac{4L}{C} \geqslant 0$, y

$$\lambda = \frac{-R \pm \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}\,i}{2L}$$

[10] En la actualidad la mayoría de los sistemas de distribución de energía para uso doméstico e industrial emplean corriente alterna. Cualquier aparato que se enchufe a una toma de pared utiliza por lo tanto corriente alterna. Pero también muchos dispositivos alimentados con baterías, como radios y teléfonos móviles, emplean la corriente continua que suministran sus baterías para crear o amplificar corrientes alternas.

[11] En Europa la corriente que suministran las compañías eléctricas tiene una frecuencia de 50 hercios mientras que en Estados Unidos y Canadá emplean una frecuencia de 60 hercios.

en otro caso. En consecuencia

$$i_h(t) = \begin{cases} e^{-\frac{R}{2L}t}\left(c_1 e^{\frac{\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}t} + c_2 e^{-\frac{\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}}{2L}t}\right) & \text{si } R^2 - \frac{4L}{C} > 0 \\ e^{-\frac{R}{2L}t}(c_1 + c_2 t) & \text{si } R^2 = \frac{4L}{C} \\ e^{-\frac{R}{2L}t}\left(c_1 \cos \frac{\sqrt{\frac{4L}{C}-R^2}}{2L} t + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{\frac{4L}{C}-R^2}}{2L} t\right) & \text{si } R^2 - \frac{4L}{C} < 0 \end{cases} \tag{3.121}$$

Como L, R y C suponemos que son números positivos, en cualquiera de los tres casos $i_h(t)$ tiende a 0 cuando t tiende a $+\infty$.

Podemos utilizar el método de los coeficientes indeterminados para encontrar una solución particular de la ecuación (3.120) de la forma

$$i_p(t) = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t.$$

Derivando esta expresión y sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} & -L\omega^2(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t) + R\omega(-A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t) + \\ & \qquad \frac{1}{C}(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t) = \omega E_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

e igualando coeficientes

$$\begin{aligned} \left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right) A + R\omega B &= \omega E_0 \\ -R\omega A + \left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right) B &= 0 \end{aligned}$$

luego

$$A = \frac{\omega E_0 \left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right)}{\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right)^2 + R^2\omega^2} \quad \text{y} \quad B = \frac{\omega^2 E_0 R}{\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right)^2 + R^2\omega^2}.$$

En consecuencia

$$i_p(t) = \frac{\omega E_0}{\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right)^2 + R^2\omega^2}\left(\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right) \cos \omega t + \omega R \operatorname{sen} \omega t\right).$$

Eligiendo ϕ, $0 \leqslant \phi < \pi$, tal que

$$\cos \phi = \frac{\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right)}{\sqrt{\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right)^2 + R^2\omega^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \phi = \frac{\omega R}{\sqrt{\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right)^2 + R^2\omega^2}}$$

podemos poner i_p como

$$i_p(t) = \frac{E_0}{\sqrt{\left(L\omega - \frac{1}{Cw}\right)^2 + R^2}} \cos(\omega t - \phi). \tag{3.122}$$

Esta función tiene la misma frecuencia que el voltaje que se aplica al circuito y un desfase dado por ϕ.

Podemos resumir lo anterior diciendo que la solución de la ecuación (3.120) es la suma de un termino transitorio, i_h, cuyo efecto decrece exponencialmente con el tiempo y un término estable, i_p, de tipo sinusoidal con la misma frecuencia que el voltaje aplicado al circuito. Para valores grandes del tiempo el comportamiento del circuito viene descrito esencialmente por la componente estable.

La expresión

$$Z = \sqrt{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 + R^2} \tag{3.123}$$

se denomina **impedancia** del circuito. La solución estable se puede expresar en términos de la impedancia en la forma

$$i_p(t) = \frac{E_0}{Z}\cos(\omega t - \phi) \tag{3.124}$$

que es una función sinusoidal de amplitud

$$I_0 = \frac{E_0}{Z}. \tag{3.125}$$

Al término

$$S = L\omega - \frac{1}{C\omega} \tag{3.126}$$

se le denomina **reactancia**. Como $Z^2 = S^2 + R^2$, si δ, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \delta \leqslant \frac{\pi}{2}$, es tal que

$$\cos\delta = \frac{R}{Z} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\delta = \frac{S}{Z}$$

resulta que $\cos\delta = \operatorname{sen}\phi$ y $\operatorname{sen}\delta = -\cos\phi$ y, por tanto, $\phi = \delta + \frac{\pi}{2}$. Podemos escribir entonces i_p en la forma

$$i_p(t) = \frac{E_0}{Z}\cos\left(\omega t - \delta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{E_0}{Z}\operatorname{sen}(\omega t - \delta). \tag{3.127}$$

El valor de la amplitud de la componente estable, I_0, tiende a 0 cuando la frecuencia tiende a infinito y es máximo cuando la reactancia es nula. Esto ocurre cuando la frecuencia del voltaje de entrada del circuito tiene el valor

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{3.128}$$

que se denomina **frecuencia de resonancia** del circuito.

Ejemplo 3.7.2. Consideremos un circuito como el de la figura 3.12 con $R = 50$ ohmios, $L = 0{,}1$ henrios y $C = 5 \times 10^{-4}$ faradios. En el instante $t = 0$, cuando la intensidad y la carga son nulas, el circuito se conecta a la red que proporciona una corriente de 220 voltios con una frecuencia de 50 hercios.

Como la frecuencia de la corriente de la red es de 50 hercios su frecuencia angular será $\omega = 2\pi \times 50$ radianes/segundo. La ecuación (3.120) en este caso es de la forma

$$0{,}1i'' + 50i' + 2000i = (100\pi)220 \cos 100\pi t. \tag{3.129}$$

Reemplazando los valores de R, L, C y ω en la ecuación (3.123) obtenemos que la impedancia es

$$Z = \sqrt{2500 + \left(10\pi - \frac{20}{\pi}\right)^2} \approx 55{,}92 \text{ ohmios}$$

luego la amplitud de la solución particular es

$$I_0 = \frac{220}{Z} \approx \frac{220}{55{,}92} \approx 3{,}934 \text{ amperios.}$$

Para obtener i_p en la forma (3.127) necesitamos calcular el ángulo

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{S}{R} = \operatorname{arctg} \frac{10\pi - \frac{20}{\pi}}{50} \approx 0{,}464.$$

En consecuencia

$$i_p(t) = I_0 \operatorname{sen}(100\pi t - \delta) \approx 3{,}934 \operatorname{sen}(100\pi t - 0{,}464). \tag{3.130}$$

La ecuación característica

$$0{,}1\lambda^2 + 50\lambda + 2000 = 0$$

tiene dos raíces

$$\lambda = \frac{-50 \pm \sqrt{2500 - 800}}{0{,}2} = \begin{cases} 50\left(-5 + \sqrt{17}\right) \approx -43{,}84 \\ 50\left(-5 - \sqrt{17}\right) \approx -456{,}16 \end{cases}$$

En consecuencia la solución general de (3.129) es

$$i(t) = c_1 e^{50\left(-5+\sqrt{17}\right)t} + c_2 e^{50\left(-5-\sqrt{17}\right)t} + I_0 \operatorname{sen}(100\pi t - \delta).$$

Como $i(0) = Q(0) = 0$ se obtiene de (3.116) que

$$0{,}1i''(0) = 0.$$

Sustituyendo los valores iniciales en la solución se obtienen las condiciones

$$\begin{aligned}
&c_1 + c_2 - I_0 \operatorname{sen}\delta = 0\\
&50\left(-5+\sqrt{17}\right)c_1 + 50\left(-5-\sqrt{17}\right)c_2 + 100 I_0 \pi \cos\delta = 0
\end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned}
c_1 + c_2 &= I_0 \operatorname{sen}\delta\\
c_1 - c_2 &= \frac{I_0}{50\sqrt{17}}\left(250 \operatorname{sen}\delta - 100\pi\cos\delta\right)
\end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{I_0}{2}\left(\left(1+\frac{5}{\sqrt{17}}\right)\operatorname{sen}\delta - \frac{2}{\sqrt{17}}\pi\cos\delta\right) \approx -0{,}730\\
c_2 &= \frac{I_0}{2}\left(\left(1-\frac{5}{\sqrt{17}}\right)\operatorname{sen}\delta + \frac{2}{\sqrt{17}}\pi\cos\delta\right) \approx 2{,}492.
\end{aligned}$$

3.8. Ejercicios

3.8.1. ¿Pueden ser $f(x) = x$ y $g(x) = e^x$ soluciones de la ecuación

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

donde $a_1(x)$ y $a_2(x)$ son funciones continuas, en el intervalo $(0,2)$? ¿Y en $(-6,-1)$?

3.8.2. Reduce el orden de la ecuación diferencial

$$xy'' + 2y' + xy = 0, \qquad \text{con } x > 0,$$

y resuélvela sabiendo que $y_1 = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ es una solución particular.

3.8.3. Halla la solución general de la ecuación diferencial

$$xy'' - (x+1)y' + y = 0, \qquad \text{con } x > 0,$$

buscando previamente una solución particular de tipo exponencial.

3.8.4. Resuelve la ecuación

$$x^2y'' + 2xy' - 6y = 0, \qquad \text{con } x > 0,$$

buscando soluciones de la forma $y = x^r$.

3.8.5. Halla la solución general de las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $y'' + 3y' + 2y = 0$ b) $y'' - y' - 6y = 0$
c) $4y'' + 8y' + 3y = 0$ d) $y''' - 5y'' + 4y = 0$
e) $y^{(6)} - 3y^{(4)} + 3y'' - y = 0$ f) $y'' - 4y' + 4y = 0$
g) $y'' + 4y' + 5y = 0$ h) $y'' + 6y' + 11y = 0$
i) $y''' + 6y' + 20y = 0$ j) $y^{(6)} + 3y^{(4)} + 3y'' + y = 0$

3.8.6. Resuelve los siguientes problemas de valores iniciales:

a) $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
b) $y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$
c) $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -3$

3.8.7. Utiliza el método de variación de las constantes para encontrar una solución particular de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y'' + 3y' + 2y = 4e^x$ b) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$
c) $y'' + y = \sec x$ d) $y''' + y' = \operatorname{cosec} x$
e) $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$ f) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \log x$

3.8.8. Halla la solución general de las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $y'' - y' - 6y = 2 \operatorname{sen} 3x$
b) $y'' + y = x \operatorname{sen} x$
c) $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \operatorname{sen} x$
d) $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$
e) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = e^x - xe^{2x}$
f) $x^2y'' - 6x^2y' + 9x^2y = e^{3x}, \quad x > 0$

3.8.9. Halla una solución particular de la ecuación

$$y''' + y' - 10y = 52xe^{-x} \operatorname{sen} 2x$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

3.8.10. Resuelve los siguientes problemas de valores iniciales:

a) $y'' + 4y = 2x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$
b) $y'' + 3y' + 2y = e^x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3$
c) $y''' + y'' = x + e^{-x}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

3.8.11. Indica, para las siguientes ecuaciones diferenciales, cuál es la forma de la función y_p que hay que utilizar para encontrar una solución particular por el método de los coeficientes indeterminados. No es preciso determinar los valores de los coeficientes.

a) $y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{sen} x$ b) $y^{(5)} - y^{(3)} = e^x + 2x^2 - 5$

c) $y'' - 6y' + 13y = xe^x \operatorname{sen} 2x$ d) $y''' - 5y'' + 4y = e^{2x} - e^{3x}$

3.8.12. Una objeto de 400 g de masa cuelga de un muelle. En el punto de equilibrio el muelle sufre un alargamiento de 245 cm. Se tira del muelle hacia abajo 10 cm y cuando se suelta sale dirigido hacia arriba a una velocidad de $\sqrt{84}$ cm/s. Indica cuál es la ecuación del movimiento suponiendo que no hay amortiguamiento y resuélvela. Expresa la solución en la forma amplitud fase.

3.8.13. Una objeto de masa 0,5 kg se fija a un resorte lo que hace que se estire 0,98 m al llegar al punto de equilibrio. Se desplaza el objeto 1 m hacia abajo y se suelta. Determina el movimiento del objeto si el sistema se encuentra en un medio que tiene una constante de amortiguamiento de 1 N s/m, y está sometido a una fuerza externa de $2\cos(2t)$ N.

3.8.14. Un objeto que flota en agua sufre un empuje hacia arriba igual al peso del agua que desplaza. Un pájaro de masa m está posado en una boya cilíndrica de densidad ρ, radio R y altura h, que está flotando en reposo. ¿Que proporción de la boya está por debajo de la superficie del agua?

El pájaro sale volando. Demuestra que ahora la boya se mueve hacia arriba y hacia abajo, y que la altura de la parte de la boya sumergida oscila alrededor de ρh con amplitud $\frac{m}{\pi R^2}$ y periodo $2\pi\sqrt{\frac{\rho h}{g}}$.

3.8.15. La ecuación diferencial

$$y'' + \lambda y' + \omega^2 y = 0$$

donde λ y ω son constantes, nos proporciona un modelo de la vibración de una copa de vino. Supongamos que cuando se golpea la copa esta vibra a 660 hercios. Demuestra que $\sqrt{4\omega^2 - \lambda^2} = 2640\pi$.

Si el sonido tarda 3 segundos en apagarse, y esto ocurre cuando las vibraciones originales se han reducido a la centésima parte de su nivel inicial, demuestra que $\lambda = \dfrac{2\log 100}{3}$.

La copa sólo se puede deformar hasta un valor de $y \approx 1$. Un tono puro con una frecuencia de 660 hercios y una potencia de D decibelios dirigida a la copa produce una fuerza externa

$$F_e(t) = \frac{10^{(D/10)-8}}{3}\cos(1320\pi)t.$$

¿Qué potencia debe tener dicho sonido, es decir cuál debe ser el valor de D, para que la copa se rompa?

3.8.16. Consideremos un circuito eléctrico formado por una resistencia de 10 ohmios, una autoinducción de 0,1 henrios y un condensador de 2×10^{-3} faradios. Inicialmente, cuando la intensidad de la corriente y la carga del circuito son nulas, se conecta a una fuente externa que le proporciona una corriente alterna de 122 voltios con una frecuencia de 10 hercios. Determina la impedancia, la reactancia y la intensidad de la corriente en el circuito

3.8.17. Un circuito eléctrico está formado por una autionducción de 0,1 henrios y un condensador de 0,1 faradios. El condensador falla si su carga supera los 2 culombios. Supongamos que inicialmente no hay ninguna carga en el condensador y no hay corriente en el circuito. Se conecta el circuito a una fuente con una corriente alterna de $(1/10)\cos 10t$ voltios. Determina la carga y si el condensador falla.

3.9. Ejercicios de controles y exámenes

3.9.1. Controles

3.9.1. Halla la solución del problema de valor inicial

$$y'' + 4y' + 3y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

3.9.2. Sabiendo que $y(x) = e^x$ es una solución de la ecuación diferencial

$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$$

en un intervalo I que no contiene al 0, halla la solución general de la ecuación en el intervalo I.

3.9.3. Halla la solución general de la ecuación

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \qquad x > 0$$

sabiendo que tiene una solución de la forma $y(x) = x^r$.

3.9.4. a) Indica cuál es la forma de la solución particular de la ecuación

$$y'' + 4y = x^2e^x - 2\cos 2x + (x+1)\operatorname{sen} x.$$

que se obtiene por el método de los coeficientes indeterminados. No es preciso que calcules los coeficientes.

b) Halla la solución general de la ecuación

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

3.9.5. a) Indica cuál es la forma de la solución particular de la ecuación

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} - \operatorname{sen} 2x$$

que se obtiene por el método de los coeficientes indeterminados. No es preciso que calcules los coeficientes.

b) Halla la solución general de la ecuación

$$xy'' - 2xy' + xy = e^x.$$

3.9.6. Resuelve las ecuaciones diferenciales:

a) $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0.$

b) $y^{(4)} + 5y''' + 6y'' - 4y' - 8y = 0.$

3.9.7. a) Resuelve la ecuación

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = x \qquad (x > 0)$$

sabiendo que $\{x, x^3\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación lineal homogénea asociada.

b) Halla la solución general de la ecuación:

$$y''' + 2y'' + y' = e^{2x} + x^2 + x.$$

3.9.8. Halla, utilizando métodos distintos, la solución general de cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}.$

b) $x^3(y'' - y) = x^2 - 2.$

3.9.9. Resuelve la siguiente ecuación diferencial:

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$$

3.9.10. Un objeto de masa 1 kg se fija a un resorte, lo que hace que se estire 0,98 m al llegar al punto de equilibrio. Se desplaza un objeto 1 m hacia abajo y se suelta. Determina el movimiento del objeto si el sistema se encuentra en un medio que tiene una constante de amortiguamiento de 2 N s/m y está sometido a una fuerza externa de $4\cos(2t)$.

3.9.11. a) Resuelve la ecuación diferencial

$$(e^x + 1)y'' - 2y' - e^xy = 0$$

sabiendo que la función $y_1 = e^x - 1$ es una solución de la ecuación.

b) ¿Pueden ser las funciones $\operatorname{senh} x$, $\cosh x$ y $2+e^x$ soluciones de una ecuación diferencial? En caso afirmativo encuentra una ecuación, del menor orden posible, del que dichas funciones sean solución.

3.9.12. a) Halla la solución del problema de valor inicial:

$$y''' - y'' - y' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 0.$$

b) Halla la solución general de la ecuación:

$$y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0.$$

3.9.13. Resuelve el problema de valor inicial

$$y'' + 4y = \cos x \cos 3x, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

3.9.14. Halla la solución general de la ecuación diferencial:

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}.$$

3.9.15. Halla una solución particular de la ecuación

$$y'' + 2y' + 5y = 16xe^{-x} \operatorname{sen} 2x$$

aplicando el método de los coeficientes indeterminados.

3.9.16. Halla la solución del problema de valor inicial:

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x+1}, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

3.9.2. Exámenes

3.9.17. Se considera la ecuación diferencial

$$x^2y'' - 2y = 0.$$

a) Demuestra que la ecuación posee una solución de la forma $y(x) = x^r$.

b) Halla un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación.

c) Halla la solución general de la ecuación diferencial:

$$x^2y'' - 2y = 3x^2 - 1.$$

3.9.18. a) Enuncia con precisión el teorema de existencia y unicidad para problemas de valores iniciales de ecuaciones lineales de orden $n > 1$.

b) Haz uso del teorema precedente para justificar si el siguiente problema de valor inicial tiene solución o no:

$$\begin{cases} xy'' + \dfrac{x}{4-x^2}y' - e^x y = \ln x, \\ y\left(\dfrac{1}{4}\right) = -40, \quad y'\left(\dfrac{1}{4}\right) = 1, \end{cases}$$

y, si existe, indica el mayor intervalo en el que la solución puede estar definida.

3.9.19. Resuelve la ecuación diferencial:

$$y''' + y'' + y' + y = xe^x.$$

3.9.20. Se considera la ecuación diferencial

$$y'' - \frac{1}{x}\,y' + \frac{1}{x^2}\,y = 0, \qquad x > 0.$$

a) Demuestra que la ecuación posee una solución de la forma $y(x) = x^r$.

b) Halla un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación.

c) Halla la solución general de la ecuación diferencial:

$$y'' - \frac{1}{x}\,y' + \frac{1}{x^2}\,y = 2\,\frac{\ln x}{x}, \qquad x > 0.$$

3.9.21. Halla la solución general de la ecuación diferencial:

$$y'' + 4y = 4t^2 + 10e^{-t}.$$

3.9.22. Se considera la ecuación diferencial

$$xy'' - (x+1)y' + y = 0, \qquad (x > 0).$$

a) Demuestra que la ecuación tiene una solución de la forma $y(x) = e^{\alpha x}$ para algún α.

b) Halla un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación.

c) Halla la solución general de la ecuación:

$$xy'' - (x+1)y' + y = x^2e^x, \qquad (x > 0).$$

d) Halla la solución general de la ecuación:

$$xy'' - (x+1)y' + y = xe^x, \qquad (x > 0).$$

3.9.23. Se considera la ecuación diferencial

$$(3x^3 + x)y'' + 2y' - 6xy = 0, \quad x > 0.$$

a) Demuestra que la ecuación tiene una solución de la forma $y(x) = x^r$.

b) Halla un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación.

c) Halla la solución general de la ecuación:

$$(3x^3 + x)y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2, \quad x > 0.$$

3.9.24. Halla la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x}, \quad x > 0$$

CAPÍTULO 4

Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden

Hasta ahora hemos considerado únicamente ecuaciones diferenciales aisladas. Sin embargo, en muchas aplicaciones aparecen situaciones en las que el fenómeno que se quiere estudiar está descrito por dos o más funciones desconocidas de tal manera que la variación de cada una de estas funciones depende también de las otras funciones. En este caso no será suficiente con una única ecuación si no que más bien se necesitará un conjunto de ecuaciones. Un conjunto de ecuaciones diferenciales que han de ser satisfechas simultáneamente es lo que se denomina un sistema de ecuaciones diferenciales. En este capítulo vamos a estudiar algunos de estos sistemas.

El tipo de sistemas por el que estamos interesados, y que es el único que vamos a considerar en estas notas, es aquel en el que todas sus ecuaciones vienen expresadas, o se pueden expresar, en forma normal y el número de funciones incógnitas es el mismo que el de ecuaciones. Supondremos además que dichas ecuaciones son de primer orden.[1] Un sistema de este tipo vendrá dado en la forma

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}\right. \tag{4.1}$$

Una **solución del sistema** (4.1) en un intervalo I es una función vectorial

[1] Esta segunda condición en realidad no supone ninguna pérdida de generalidad en el estudio de los sistemas de ecuaciones en los que estamos interesados porque, como veremos más adelante, todo sistema de ecuaciones diferenciales expresadas en forma normal tiene un sistema de ecuaciones diferenciales de primer grado equivalente.

$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ definida en I y con valores en $\mathbb{R}^n$ que verifica

$$y_j'(x) = f_j(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))$$

para todo $x \in I$ y $j = 1, \ldots, n$.

Ejemplo 4.0.1. Si $y_1(x) = y_2(x) = e^{2x}$, la función (y_1, y_2) es una solución del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 3y_1 - y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2 \end{cases}$$

porque

$$y_1'(x) = 2e^{2x} = 3y_1(x) - y_2(x) \quad \text{e} \quad y_2'(x) = 2e^{2x} = y_1(x) + y_2(x).$$

Cuando el número de ecuaciones del sistema es pequeño se suelen emplear diferentes letras para las funciones incógnitas, generalmente $x, y, z. \ldots,$ en lugar de subíndices.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden también pueden resultar útiles en el estudio de ecuaciones de diferenciales de orden superior. Veamos cómo. Si una función y es una solución de la ecuación diferencial de orden n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{4.2}$$

y ponemos

$$y_1 = y,\ y_2 = y', \ldots, y_n = y^{(n-1)}, \tag{4.3}$$

entonces es obvio que $(y_1, \ldots, y_n)$ es una solución del sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{4.4}$$

Recíprocamente, si $(y_1, \ldots, y_n)$ es una solución del sistema (4.4) entonces y_1 es una solución de la ecuación (4.2). En este sentido podemos considerar que la ecuación (4.2) y el sistema (4.4) son equivalentes. Obsérvese que si la ecuación diferencial (4.2) es lineal entonces todas las ecuaciones del sistema (4.4) son lineales.

Ejemplo 4.0.2. La ecuación de tercer orden

$$y''' - 2y'' - 3y' + 7y = 3e^x \cos 2x$$

haciendo los cambios

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y''.$$

da lugar al sistema de ecuaciones equivalente

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \dfrac{dy_3}{dx} = 2y_3 + 3y_2 - 7y + 3e^x \cos 2x \end{cases}$$

Aplicando el método anterior a cada una de las ecuaciones de un sistema de ecuaciones, no todas necesariamente del mismo orden pero todas expresadas en forma normal, se obtiene un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden equivalente al anterior. Este hecho nos permite remitir el estudio de sistemas de ecuaciones de cualquier orden al estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Ejemplo 4.0.3. El sistema de ecuaciones de segundo orden

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -4x + 3y \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \quad 2x - 3y + 10 \operatorname{sen} 5t \end{cases}$$

haciendo los cambios

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad y_1 = y, \quad y_2 = y'$$

da lugar al sistema de cuatro ecuaciones de primer orden equivalente

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 + 3y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = 2x_1 - 3y_1 + 10 \operatorname{sen} 5t \end{cases}$$

Si las funciones $f_1, \ldots, f_n$ son lineales en las variables $y_1, \ldots, y_n$ el sistema (4.1) es un **sistema de ecuaciones lineales de primer orden**. La forma general de estos sistemas es

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} =& a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \\ \frac{dy_2}{dx} =& a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dx} =& a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{aligned}\right. \tag{4.5}$$

donde las funciones a_{ij} y b_i, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, son funciones continuas en un cierto intervalo I. El sistema (4.5) se denomina **sistema lineal de orden** n o simplemente **sistema lineal**. Si $b_1 = b_2 = \cdots = b_n \equiv 0$ el sistema se dice que es **homogéneo**, en caso contrario se dice que es **no homogéneo**.

Cuando se trabaja con sistemas lineales es conveniente emplear la notación matricial. Haciendo uso de esta notación el sistema (4.5) se puede escribir en la forma:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Si identificamos la función vectorial de una variable real

$$\mathbf{y}(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$$

con el vector columna

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

donde cada elemento de ese vector es una función real de una variable, la relación (4.6) también se puede escribir en la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x) \tag{4.7}$$

donde $\mathbf{A}(x)$ es la matriz cuadrada

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \ldots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

y $\mathbf{b}$ es la función vectorial de una variable $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$.

La primera idea que surge al tratar de hallar la solución de un sistemas de ecuaciones diferenciales es la de intentar reproducir los métodos empleados al resolver los sistemas de ecuaciones (algebraicas) lineales. El **método de eliminación** para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales consiste, como en el caso de ecuaciones algebraicas, en ir eliminando de manera sucesiva las incógnitas hasta llegar a una ecuación diferencial, generalmente de orden superior, con una única incógnita que habrá que revolver, si es posible, empleando los métodos que hemos visto en los capítulos precedentes.

Ejemplo 4.0.4. Supongamos que queremos resolver el sistema

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = 6x - 7y \end{cases}$$

Despejando x en la segunda ecuación queda que

$$x = \frac{1}{6}\left(y' + 7y\right) \tag{4.8}$$

y derivando

$$x' = \frac{1}{6}\left(y'' + 7y'\right).$$

Sustituyendo x y x' en la primera ecuación del sistema se obtiene

$$\frac{1}{6}\left(y'' + 7y'\right) = \frac{4}{6}\left(y' + 7y\right) - 3y$$

que simplificando queda

$$y'' + 3y' - 10y = 0. \tag{4.9}$$

Esta es una ecuación lineal homogénea de segundo orden cuya ecuación característica

$$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$$

tiene dos raíces $\lambda = 2$ y $\lambda = -5$. Según vimos en el capítulo precedente la solución general de (4.9) es entonces

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-5t}.$$

Sustituyendo esta expresión en (4.8) se obtiene que

$$x(t) = \frac{1}{6}\left(2c_1 e^{2t} - 5c_2 e^{-5t}\right) + \frac{7}{6}\left(c_1 e^{2t} + c_2 e^{-5t}\right) = \frac{3}{2}c_1 e^{2t} + \frac{1}{3}c_2 e^{-5t}.$$

Este procedimiento de resolución de sistemas lineales es útil si el sistema es sencillo. Para sistemas más complicados los métodos que veremos más adelante en este capítulo resultan más adecuados.

4.1. Estructura del conjunto de soluciones

El esquema que vamos a seguir en el desarrollo esta sección va a ser muy similar al que seguimos al estudiar la estructura del conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal de orden superior. Al igual que allí, comenzaremos enunciando, sin demostración, el teorema de existencia y unicidad para los problemas de valor inicial de sistemas lineales.

Teorema 4.1.1 (Teorema de existencia y unicidad). *Sean a_{ij} y b_i funciones continuas en un intervalo I, $i, j = 1, \ldots, n$. Sean $x_0 \in I$ e $y_1^0, \ldots, y_n^0 \in \mathbb{R}$. Existe una única solución $(y_1, \ldots, y_n)$ del sistema lineal (4.5) en el intervalo I que satisface las condiciones iniciales $y_1(x_0) = y_1^0, \ldots, y_n(x_0) = y_n^0$.*

Si el sistema es homogéneo, la función vectorial idénticamente nula siempre es una solución. Teniendo esto en cuenta podemos enunciar la siguiente consecuencia del teorema precedente que nos será de gran utilidad en lo que sigue.

Corolario 4.1.2. *Sean a_{ij} y b_i, $i, j = 1, \ldots, n$, funciones continuas en un intervalo I. Si $(y_1, \ldots, y_n)$ es una solución del sistema lineal homogéneo*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}$$

en el intervalo I que, para algún $x_0 \in I$, satisface las condiciones iniciales $y_1(x_0) = \cdots = y_n(x_0) = 0$ entonces $y_1 = \cdots = y_n \equiv 0$ en I.

4.1.1. Sistemas lineales homogéneos

Comenzaremos estudiando la estructura del conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} \tag{4.10}$$

Teorema 4.1.3 (Principio de superposición). *Si $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ son soluciones del sistema lineal homogéneo (4.10) en un intervalo I y $c_1, \ldots, c_m$ son números reales, entonces la combinación lineal*

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_m\mathbf{y}_m$$

también es una solución del sistema (4.10) en I.

La demostración de este teorema es inmediata.

Definición 4.1.4. Un conjunto de funciones vectoriales $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ se dice que es **linealmente dependiente** en un intervalo I si existen constantes reales, $c_1, \ldots, c_n$, no todas nulas, tales que

$$c_1\mathbf{y}_1(x) + \cdots + c_n\mathbf{y}_n(x) = 0 \tag{4.11}$$

para todo $x \in I$. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente se dice que es **linealmente independiente**.

Definición 4.1.5. Dadas n funciones vectoriales, $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$,

$$\mathbf{y}_j = (y_{1j}, \ldots, y_{nj}), \quad j = 1, \ldots, n,$$

se define el **wronskiano** de $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ como el determinante

$$W[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n] = \det \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

Por las propiedades de los determinantes se verifica que si las funciones $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ son linealmente dependientes entonces su wronskiano es nulo en todo punto. Si dichas funciones son soluciones de un sistema lineal homogéneo el recíproco también es cierto.

Teorema 4.1.6. *Si $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ son soluciones del sistema lineal homogéneo de orden n (4.10) en un intervalo I, entonces el conjunto $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ es linealmente independiente si, y sólo si, $W[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n]$ no se anula en I.*

Demostración. Para $j = 1, \ldots, n$ sea

$$\mathbf{y}_j = (y_{1j}, \ldots, y_{nj}).$$

Supongamos que que existe un punto $x_0 \in I$ donde el wronskiano se anula. El determinante de la matriz asociada al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} c_1 y_{11}(x_0) + \cdots + c_n y_{1n}(x_0) &= 0 \\ c_1 y_{21}(x_0) + \cdots + c_n y_{2n}(x_0) &= 0 \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \quad & \ \vdots \\ c_1 y_{n1}(x_0) + \cdots + c_n y_{nn}(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

es precisamente el wronskiano en x_0 que estamos suponiendo que es nulo. Esto nos dice que el sistema tiene una solución $(c_1, \ldots, c_n)$ no nula. Por el principio de superposición la función

$$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{y}_1 + \cdots + c_n \mathbf{y}_n$$

es una solución de (3.4). Esta solución verifica que $\mathbf{y}(x_0) = 0$ lo que, por el corolario 4.1.2, implica que $y \equiv 0$ que contradice el que el conjunto $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ es linealmente independiente. □

Corolario 4.1.7. *Si $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ son soluciones del sistema lineal homogéneo de orden n (4.10) en un intervalo I, entonces el wronskiano $W[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n]$ o es idénticamente nulo o no se anula nunca en I.*

Definición 4.1.8. Se denomina **conjunto fundamental de soluciones** del sistema lineal homogéneo de orden n (4.10), en un intervalo I, a cualquier conjunto de n soluciones del sistema linealmente independientes en I.

Teorema 4.1.9. *Existe un conjunto fundamental de soluciones del sistema lineal homogéneo (4.10) en el intervalo I.*

Demostración. Por el teorema de existencia y unicidad, 4.1.1, si $x_0 \in I$, existen soluciones del sistema, $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$, verificando las condiciones iniciales

$$\mathbf{y}_1(x_0) = (1, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{y}_2(x_0) = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ \mathbf{y}_n(x_0) = (0, \ldots, 0, 1)$$

En este caso la correspondiente matriz fundamental que aparece en la definición del wronskiano tiene unos en la diagonal y ceros en las demás entradas, luego $W[y_1, \ldots, y_n](x_0) = 1$. Esto demuestra que el conjunto de soluciones $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones. □

Se define la **solución general** de un sistema de ecuaciones lineales en un intervalo como el conjunto de todas sus soluciones en ese intervalo.

Teorema 4.1.10. *Si $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ es un conjunto fundamental de soluciones de un sistema lineal homogéneo de orden n en un intervalo, entonces la solución general del sistema en dicho intervalo es*

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n, \tag{4.12}$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias.

La demostración es análoga a la del teorema 3.1.14.

4.1.2. Sistemas no homogéneos

Para sistemas no homogéneos se tienen las correspondientes versiones de los teoremas para ecuaciones lineales no homogéneas.

Teorema 4.1.11. *Si $\mathbf{y}_p$ es una solución particular del sistema lineal*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x) \tag{4.13}$$

en un intervalo I e $\mathbf{y}_h$ es una solución del sistema lineal homogéneo asociado a (4.13),

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}, \tag{4.14}$$

entonces

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p$$

es también una solución de (4.13) en I y todas las soluciones de (4.13) en dicho intervalo son de esa forma.

Corolario 4.1.12. *Si* $\mathbf{y}_p$ *es una solución particular del sistema lineal*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x) \tag{4.15}$$

en un intervalo I *e* $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ *es un conjunto fundamental de soluciones, en el mismo intervalo, del sistema lineal homogéneo asociado a (4.15), entonces la solución general del sistema (4.15) en* I *es*

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n + \mathbf{y}_p, \tag{4.16}$$

donde $c_1, \dots, c_n$ *son constantes arbitrarias.*

Teorema 4.1.13 (Principio de superposición para sistemas no homogéneos). *Si para cada* $i = 1, 2, \dots, m$ *la función* $\mathbf{y}_i$ *es una solución del sistema lineal*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}_i(x)$$

en un intervalo I*, entonces la combinación lineal*

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \cdots + c_m\mathbf{y}_m,$$

donde $c_1, c_2, \dots, c_m$ *son constantes reales arbitrarias, es una solución del sistema lineal*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + c_1\mathbf{b}_1(x) + \cdots + c_m\mathbf{b}_m(x)$$

en el intervalo I*.*

4.2. Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes

En esta sección vamos a estudiar sistemas lineales de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases} \tag{4.17}$$

o, expresados en forma matricial

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \tag{4.18}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz $n \times n$ de elementos constantes.

Vimos al principio del capítulo cómo se podían resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales por el método de eliminación. En esta sección vamos a ver un método alternativo de resolución de sistemas lineales con coeficientes constantes.

4.2.1. Método de los autovalores

Procediendo de forma análoga a como lo hicimos en el caso de ecuaciones lineales con coeficientes constantes vamos a buscar soluciones del sistema (4.18) de la forma $\mathbf{y}(x) = e^{\lambda x}\mathbf{v}$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v}$ es un vector de $\mathbb{R}^n$. Si sustituimos esta solución en (4.18) se tiene que

$$\lambda e^{\lambda x}\mathbf{v} = \mathbf{A}\left(e^{\lambda x}\mathbf{v}\right)$$

y dividiendo ambos miembros por la exponencial

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \tag{4.19}$$

Esto nos dice que para que $\mathbf{y} = e^{\lambda x}\mathbf{v}$ sea una solución de (4.18) se ha de verificar la condición (4.19). Obviamente dicha condición también es suficiente. Además como la exponencial no se anula, dicha solución será no trivial, es decir distinta de la función 0, si el vector $\mathbf{v}$ es distinto de cero. Hemos reducido así el problema de encontrar soluciones de (4.18) del tipo indicado más arriba al problema algebraico de encontrar escalares λ y vectores $\mathbf{v}$ que satisfagan (4.19). Para responder a este último problema es preciso que recordemos algunos resultados y conceptos de álgebra lineal. Para simplificar la exposición posterior será conveniente trabajar en el campo complejo.

Definición 4.2.1. Un número complejo λ se dice que es un **autovalor** o un **valor propio** de la matriz $\mathbf{A}$ si existe un vector no nulo $\mathbf{v}$ tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \tag{4.20}$$

El vector $\mathbf{v}$ se dice que es un **autovector** o un **vector propio** correspondiente a λ.

Si denotamos por $\mathbf{I}$ a la matriz identidad, que es la que tiene unos en la diagonal y ceros en los demás elementos, podemos reformular la definición anterior diciendo que λ es un autovalor de la matriz $\mathbf{A}$ si, y sólo si, existe un vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{4.21}$$

El conjunto de vectores $\mathbf{v}$ que satisfacen la relación (4.21) es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^n$. Identificando las matrices cuadradas $n \times n$ con los correspondientes endomorfismos de $\mathbb{C}^n$, dicho subespacio es precisamente el núcleo del endomorfismo $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$, que habitualmente se denota $\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$. La definición anterior nos dice que λ es un autovalor de $\mathbf{A}$ si el núcleo de $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ no se reduce al subespacio $\{\mathbf{0}\}$.

Un resultado clásico de álgebra lineal nos dice que el que $\ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) \neq \{\mathbf{0}\}$ es equivalente a que el endomorfismo $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ no sea inyectivo que, a su vez, es equivalente a que no sea inversible. Esta última condición también es equivalente a que

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \tag{4.22}$$

Resumiendo lo anterior, λ es un autovalor de $\mathbf{A}$ si, y sólo si, λ es una solución de la ecuación (4.22).

A la ecuación (4.22) se le denomina **ecuación característica** de la matriz $\mathbf{A}$. El determinante que aparece en la ecuación se comprueba fácilmente que es un polinomio en λ de grado n. Dicho polinomio se denomina **polinomio característico** de la matriz. Se deduce del teorema fundamental del álgebra que existen exactamente n autovalores, contados de acuerdo con su multiplicidad.

Una propiedad de los autovectores que se comprueba sin dificultad es la siguiente.

Proposición 4.2.2. *Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ autovalores distintos de una matriz $n \times n$ y para cada $j = 1, 2, \ldots, m$ sea $\mathbf{v}_j$ un autovector correspondiente al autovalor λ_j. Entonces los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ son linealmente independientes.*

Para nuestro estudio de los sistemas lineales estamos interesados exclusivamente en el caso en que la matriz $\mathbf{A}$ es real. Por este motivo en lo que sigue, y salvo mención expresa de lo contrario, supondremos que $\mathbf{A}$ es real. En este caso los autovalores y autovectores tiene algunas propiedades adicionales que se demuestran fácilmente y que es conveniente hacer notar porque las necesitaremos más adelante.

Si $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ es un autovector correspondiente a un autovalor real λ, entonces los vectores reales $(\operatorname{Re} v_1, \ldots, \operatorname{Re} v_n)$ e $(\operatorname{Im} v_1, \ldots, \operatorname{Im} v_n)$ también satisfacen (4.20). Como al menos uno de estos dos vectores es no nulo resulta que siempre existe un autovector real correspondiente a λ. En lo que sigue, salvo mención expresa de lo contrario, siempre que hablemos de los autovectores de un autovalor real nos estaremos refiriendo exclusivamente a los autovectores reales.

Por otro lado si λ es un autovalor no real, su conjugado $\overline{\lambda}$ también es un autovalor. Además, en este caso, si $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ es un autovector correspondiente a λ entonces su vector conjugado, $\overline{\mathbf{v}} = (\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_n})$, es un autovector correspondiente a $\overline{\lambda}$.

Autovalores reales distintos

Estamos ya en condiciones de dar nuestro primer resultado acerca de las soluciones de (4.18) en el caso en que todos los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$ son reales y distintos.

Teorema 4.2.3. *Si la matriz $\mathbf{A}$ tiene n autovalores, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, reales distintos y $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ son autovectores correspondientes a los autovalores entonces el conjunto de funciones*

$$e^{\lambda_1 x}\mathbf{v}_1, \ldots, e^{\lambda_n x}\mathbf{v}_n \tag{4.23}$$

es un conjunto fundamental de soluciones de (4.18).

Demostración. Ya hemos visto más arriba que esas funciones son soluciones de (4.18). Para ver que además son linealmente independientes basta observar que su wronskiano en 0 es el determinante de la matriz que tiene por columnas los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, que es no nulo porque, por 4.2.2, esos vectores son linealmente independientes. □

Ejemplo 4.2.4. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = 3x - y \end{cases} \tag{4.24}$$

Expresado en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La ecuación característica de la matriz de los coeficientes del sistema es

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-1-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$$

que tiene dos soluciones reales $\lambda = 5$ y $\lambda = -2$.

El vector $\mathbf{v} = (a, b)$ es un autovector correspondiente a $\lambda = 5$ si, y sólo si, se verifica la relación

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} -a + 2b &= 0 \\ 3a - 6b &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones de la forma $(2b, b)$ con b un número real.

Análogamente, $\mathbf{v} = (a, b)$ es un autovector correspondientes a $\lambda = -2$ si

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} 6a + 2b &= 0 \\ 3a + b &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema tiene infinitas soluciones de la forma $(a, -3a)$ con a un número real. Por el teorema precedente la solución general de (4.24) es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

o en forma escalar

$$\begin{cases} x(t) = 2c_1 e^{5t} + c_2 e^{-2t} \\ y(t) = c_1 e^{5t} - 3c_2 e^{-2t} \end{cases}$$

Autovalores reales o complejos distintos

El argumento del principio de esta sección también es válido si λ es un número complejo. Por lo tanto, si los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$ son todos distintos y algunos de ellos, o todos, son complejos el procedimiento anterior nos proporciona un conjunto fundamental de soluciones de (4.18), pero, en este caso, algunas de las soluciones no son reales sino complejas.[2] Como nosotros estamos interesados sólo en las soluciones reales vamos a proceder de manera semejante a como lo hicimos en el capítulo precedente.

Ya hemos indicado antes que los autovalores, por ser la matriz real, aparecen por pares, de manera que si $\lambda = \alpha + \beta i$ es un autovalor también lo es su conjugado $\overline{\lambda} = \alpha - \beta i$. Además, los autovectores correspondientes a $\overline{\lambda}$ son los conjugados de los correspondientes a λ. Así si $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b}i$ es un autovector correspondiente a λ, las funciones

$$e^{\lambda x}\mathbf{v} \quad \text{y} \quad e^{\overline{\lambda} x}\overline{\mathbf{v}} = \overline{e^{\lambda x}\mathbf{v}}$$

son soluciones complejas de (4.18). Por ser la matriz $\mathbf{A}$ real, las partes real e imaginaria de dichas soluciones también son soluciones, en este caso reales, de (4.18). Como las dos soluciones complejas son conjugadas ambas tienen la misma parte real y sus partes imaginarias son opuestas por lo que únicamente será necesario considerar las de una de las dos soluciones complejas, por ejemplo $e^{\lambda x}\mathbf{v}$, que son

$$e^{\alpha x}\big(\mathbf{a}\cos\beta x - \mathbf{b}\operatorname{sen}\beta x\big) \quad \text{y} \quad e^{\alpha x}\big(\mathbf{b}\cos\beta x + \mathbf{a}\operatorname{sen}\beta x\big).$$

Además como

$$\operatorname{Re}\big(e^{\lambda x}\mathbf{v}\big) = \frac{e^{\lambda x}\mathbf{v} + \overline{e^{\lambda x}\mathbf{v}}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}\big(e^{\lambda x}\mathbf{v}\big) = \frac{e^{\lambda x}\mathbf{v} - \overline{e^{\lambda x}\mathbf{v}}}{2i},$$

si reemplazamos las dos soluciones complejas por las dos reales en un conjunto linealmente independiente el conjunto nuevo también es linealmente independiente. Podemos así extender el teorema 4.2.3 al caso de autovalores distintos reales o complejos.

Teorema 4.2.5. *Si la matriz $\mathbf{A}$ tiene n autovalores distintos, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-2m}$ reales y $\alpha_1 \pm \beta_1 i, \dots, \alpha_m \pm \beta_m i$ complejos, y $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-2m}$ son autovectores (reales) correspondientes a los autovalores reales y $\mathbf{a}_1 \pm \mathbf{b}_1 i, \dots, \mathbf{a}_m \pm \mathbf{b}_m i$ son autovectores correspondientes a los autovalores complejos, entonces el conjunto de funciones*

$$e^{\lambda_j x}\mathbf{v}_j, \quad e^{\alpha_k x}\big(\mathbf{a}_k\cos\beta_k x - \mathbf{b}_k\operatorname{sen}\beta_k x\big), \quad e^{\alpha_k x}\big(\mathbf{b}_k\cos\beta_k x + \mathbf{a}_k\operatorname{sen}\beta_k x\big),$$

$1 \leqslant j \leqslant n-2m$, $1 \leqslant k \leqslant m$, es un conjunto fundamental de soluciones de (4.18).

[2] Si λ es un número complejo la función $\mathbf{y}(x) = e^{\lambda x}\mathbf{v}$ en general no es real.

Ejemplo 4.2.6. Consideremos el sistema lineal

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \quad 2y - 3z \\ z' = x + 3y + 2z \end{cases} \tag{4.25}$$

La matriz de coeficientes del sistema es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

y su ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 1 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big[(2-\lambda)^2 + 9\big] = 0$$

que tiene una raíz real, $\lambda = 1$, y dos complejas, $\lambda = 2 \pm 3i$.

Los autovectores correspondientes a $\lambda = 1$ son los vectores $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ soluciones de

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

o, equivalentemente

$$\begin{aligned} v_2 - 3v_3 &= 0 \\ v_1 + 3v_2 + \quad v_3 &= 0 \end{aligned}$$

Una solución del sistema precedente es el vector $\mathbf{v} = (10, -3, -1)$.

Para calcular un autovector correspondiente a $2 + 3i$ hemos de resolver la ecuación

$$(\mathbf{A} - (2+3i)\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1-3i & 0 & 0 \\ 0 & -3i & -3 \\ 1 & 3 & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

o, equivalentemente, el sistema

$$\begin{aligned} (-1-3i)v_1 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\ -3iv_2 - \ 3v_3 &= 0 \\ v_1 + \ 3v_2 - 3iv_3 &= 0 \end{aligned}$$

Una solución de este sistema es $\mathbf{v} = (0, i, 1)$.

Aplicando el teorema precedente tenemos que

$$e^t \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \ e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos 3t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen} 3t \right), \ e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 3t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{sen} 3t \right)$$

es un conjunto fundamental de soluciones del sistema (4.25) y su solución general es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos 3t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen} 3t \right) + \\ + c_3 e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 3t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{sen} 3t \right)$$

o en forma escalar

$$\begin{cases} x(t) = 10 c_1 e^t \\ y(t) = -3 c_1 e^t + e^{2t} \big(-c_2 \operatorname{sen} 3t + c_3 \cos 3t \big) \\ z(t) = -c_1 e^t + e^{2t} \big(c_2 \cos 3t + c_3 \operatorname{sen} 3t \big) \end{cases}$$

Autovalores repetidos

En los dos últimos teoremas la hipótesis de que los autovalores son distintos únicamente sirve para garantizar que los autovectores correspondientes, y por lo tanto las correspondientes soluciones, son linealmente independientes. Si el polinomio característico de la matriz tiene raíces múltiples entonces no es posible tener n autovalores de la matriz distintos, aunque, sin embargo, sí puede ocurrir que un autovalor λ de multiplicidad[3] k verifique que la dimensión del subespacio $\ker(A - \lambda I)$ sea k, lo que asegura la existencia de k autovectores linealmente independientes correspondientes a k. Si esto ocurre para todos los autovalores, es posible elegir un conjunto de n autovectores, correspondientes a los distintos autovalores contados tantas veces como indique su multiplicidad, linealmente independientes. En este caso las conclusiones los teoremas precedentes siguen siendo válidos.

Teorema 4.2.7. *Sean*

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-2m}$$

los autovalores reales y

$$\alpha_1 \pm \beta_1 i, \ldots, \alpha_m \pm \beta_m i$$

los autovalores complejos de la matriz $\mathbf{A}$*, contados de acuerdo con su multiplicidad.*[4] *Si los autovectores (reales)* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-2m}$*, correspondientes a los autovalores reales, y* $\mathbf{a}_1 \pm \mathbf{b}_1 i, \ldots, \mathbf{a}_m \pm \mathbf{b}_m i$*, correspondientes a los autovalores complejos, son linealmente independientes entonces el conjunto de funciones*

$$e^{\lambda_j x} \mathbf{v}_j, \quad e^{\alpha_k x} \big(\mathbf{a}_k \cos \beta_k x - \mathbf{b}_k \operatorname{sen} \beta_k x \big), \quad e^{\alpha_k x} \big(\mathbf{b}_k \cos \beta_k x + \mathbf{a}_k \operatorname{sen} \beta_k x \big),$$

[3] La multiplicidad de un autovalor es su multiplicidad como raíz del polinomio característico.

[4] Es decir, cada autovalor aparece repetido tantas veces como indique su multiplicidad.

$1 \leqslant j \leqslant n - 2m$, $1 \leqslant k \leqslant m$, *es un conjunto fundamental de soluciones de* *(4.18)*.

Ejemplo 4.2.8. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica de la matriz $\mathbf{A}$ es

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 4 & 0 \\ -6 & -1-\lambda & 0 \\ 6 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\big[(9-\lambda)(-1-\lambda)+24\big] =$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 15) = 0$$

que tiene dos raíces, una doble, $\lambda = 3$, y otra simple, $\lambda = 5$.

El núcleo de $\mathbf{A} - 3\mathbf{I}$ es el conjunto de vectores $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ tales que

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

es decir

$$\ker(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = \{\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) : 3v_2 + 2v_3 = 0\}.$$

Este subespacio tiene dimensión 2. Dos vectores linealmente independientes de este subespacio son $(2, -3, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

Por otro lado un autovector correspondiente a $\lambda = 5$ ha de satisfacer la igualdad

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

o el sistema equivalente

$$\begin{aligned} v_1 + \ \ v_2 \qquad\ &= 0 \\ 3v_1 + 2v_2 - 2v_3 &= 0 \end{aligned}$$

Una solución del sistema anterior es $(1, -1, 1)$.

Aplicando el teorema precedente se concluye que un conjunto fundamental de soluciones del sistema lineal

$$\begin{cases} x' = 9x + 4y \\ y' = -6x - y \\ z' = 6x + 4y + 3z \end{cases}$$

es

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

y, por tanto, la solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}$$

o en forma escalar

$$\begin{cases} x(t) = 2c_1 e^{3t} + c_3 e^{5t} \\ y(t) = -3c_1 e^{3t} - c_3 e^{5t} \\ z(t) = c_2 e^{3t} + c_3 e^{5t} \end{cases}$$

Desafortunadamente no siempre la dimensión de $\ker(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ coincide con la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico.[5]

Ejemplo 4.2.9. La ecuación característica de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(7-\lambda) + 9 = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2 = 0$$

que tiene a $\lambda = 4$ como raíz doble. El núcleo de $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ es el conjunto de los vectores (x, y) que satisfacen la ecuación

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

esto es

$$\ker(\mathbf{A} - 4\mathbf{I}) = \{(x, y) : x + y = 0\}.$$

Este espacio es de dimensión 1. Por lo tanto es imposible encontrar dos autovectores linealmente independientes.

Cuando se da una circunstancia como la del ejemplo precedente en que la dimensión de $\ker(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ es menor que la multiplicidad de λ, no es posible encontrar un conjunto de n autovectores linealmente independientes por lo que tampoco es posible formar un conjunto fundamental de soluciones de (4.18) únicamente con funciones del tipo de las que aparecen en el teorema 4.2.7.

[5] En general la dimensión de $\ker(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ es menor o igual que la multiplicidad de λ.

Por este procedimiento sólo podemos encontrar, para cada autovalor, tantas soluciones linealmente independientes como la dimensión de $\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$.

En este caso encontrar las soluciones que nos faltan para formar un conjunto fundamental de soluciones del sistema es más complicado que en los casos que acabamos de ver.

Supongamos que λ es un autovalor de multiplicidad m y que ν, la dimensión de $\ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$, es menor que m. Para este autovalor queremos obtener, si es posible, m soluciones de (4.18) linealmente independientes. Por el procedimiento descrito en los apartados anteriores tenemos ν soluciones. Necesitamos por lo tanto $m - \nu$ nuevas soluciones. Por analogía con lo que ocurre con las ecuaciones lineales de orden n podemos intentar buscar soluciones de (4.18) linealmente independientes de la forma

$$\mathbf{y}_j(x) = e^{\lambda x}\big(\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 x + \cdots + \mathbf{a}_{j-1}x^{j-1} + \mathbf{a}_j x^j\big), \tag{4.26}$$

para tantos valores de $j = 1, 2, \ldots, m-1$ como podamos.[6]

Para que la función $\mathbf{y}_j$ sea solución del sistema (4.18) se ha de cumplir que

$$\mathbf{y}_j' = \lambda\mathbf{y}_j + e^{\lambda x}\big(\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 x + \cdots + (j-1)\mathbf{a}_{j-1}x^{j-2} + j\mathbf{a}_j x^{j-1}\big) = \mathbf{A}\mathbf{y}_j$$

o, equivalentemente, que

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{y}_j = e^{\lambda x}\big(\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 x + \cdots + (j-1)\mathbf{a}_{j-1}x^{j-2} + j\mathbf{a}_j x^{j-1}\big).$$

Dividiendo ambos miembros por $e^{\lambda x}$ se llega a que $\mathbf{y}_j$ es solución del sistema si, y sólo si,

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\big(\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 x + \cdots + \mathbf{a}_{j-1}x^{j-1} + \mathbf{a}_j x^j\big) &= \\ &= \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 x + \cdots + (j-1)\mathbf{a}_{j-1}x^{j-2} + j\mathbf{a}_j x^{j-1}.\end{aligned}$$

Igualando coeficientes de las potencias de x en los dos miembros de la relación anterior, se concluye que $\mathbf{y}_j$ es solución del sistema (4.18) si, y sólo si, se verifican las relaciones

$$\begin{cases}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{a}_{k-1} = k\mathbf{a}_k, & k = 1, 2, \ldots, j;\\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{a}_j = \mathbf{0}.\end{cases} \tag{4.27}$$

[6] También se podía haber intentado, y posiblemente es lo primero que se le ocurre a uno, buscar soluciones de la forma $\mathbf{v}x^j e^{\lambda x}$ pero se puede comprobar que dichas funciones pueden no ser soluciones de (4.18).

De la última relación se obtiene que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{a}_0 \\
\mathbf{a}_2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{a}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2\mathbf{a}_0 \\
\mathbf{a}_3 &= \frac{1}{3}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{a}_2 = \frac{1}{3!}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2\mathbf{a}_0 \\
&\vdots \\
\mathbf{a}_k &= \frac{1}{k}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{a}_{k-1} = \frac{1}{k!}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^k\mathbf{a}_0 \\
&\vdots \\
\mathbf{a}_j &= \frac{1}{j}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{a}_{j-1} = \frac{1}{j!}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^j\mathbf{a}_0
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

De esta última relación y de la primera de las relaciones de (4.27) se tiene que $\mathbf{a}_0 \in \ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{j+1}$. Si queremos que la solución sea de distinto tipo de la que ya hemos obtenido, ha de ser $j \geqslant 1$. Además para que $e^{-\lambda x}\mathbf{y}_j$ sea un polinomio de grado j el coeficiente $\mathbf{a}_j$ ha de ser no nulo. Con esta condición, para que las relaciones previas se satisfagan ha de existir por lo tanto un vector $\mathbf{a}_0 \in \ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{j+1} \setminus \ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^j$. En este caso el vector $\mathbf{a}_0$ determina, mediante las relaciones (4.28), la solución $\mathbf{y}_j$.

Resumiendo, la función (4.26) es una solución de la ecuación (4.18) si, y sólo si,

$$\mathbf{a}_0 \in \ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{j+1} \setminus \ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^j \tag{4.29}$$

y

$$\mathbf{a}_k = \frac{1}{k}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{a}_{k-1} = \frac{1}{k!}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^k\mathbf{a}_0 \tag{4.30}$$

para todo $k = 1, 2, \ldots, j$.

Supongamos ahora que $d > 1$ es tal que

$$\ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{d-1} \subsetneq \ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^d.$$

En este caso, existe un vector $\mathbf{v}_0 \in \ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^d \setminus \ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{d-1}$. Definiendo recursivamente los vectores

$$\mathbf{v}_k = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^k\mathbf{v}_{k-1}$$

para $k = 1, \ldots, j$, entonces

$$\mathbf{v}_\mathbf{k} = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^k\mathbf{v}_0 \tag{4.31}$$

y, por tanto,

$$\begin{cases} (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{d-k}\mathbf{v}_k = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{d}\mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \\ (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{d-k-1}\mathbf{v}_k = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{d-1}\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

luego $\mathbf{v}_k \in \ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{d-k} \setminus \ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{d-k-1}$. Se tiene entonces que, para $j = 0,\dots,d-1$, las condiciones (4.29) y (4.30) se cumplen cuando $\mathbf{a}_0 = \mathbf{v}_{d-j-1}$, $\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{v}_{d-j}}{1!},\dots,\mathbf{a}_j = \frac{\mathbf{v}_{d-1}}{j!}$ y, por lo tanto, las funciones

$$\mathbf{y}_j(x) = e^{\lambda x}\left(\mathbf{v}_{d-j-1} + \mathbf{v}_{d-j}\frac{x}{1!} + \cdots + \mathbf{v}_{d-2}\frac{x^{j-1}}{(j-1)!} + \mathbf{v}_{d-1}\frac{x^j}{j!}\right) \tag{4.32}$$

son soluciones de (4.18).

Se puede demostrar que siempre existe un $d \leqslant m$ tal que $\ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^d$ tiene dimensión m. Sea d el menor entero para el que esto ocurre. Si $d = 1$, existen m autovectores linealmente independientes correspondientes a λ y el argumento que precede al teorema 4.2.7 nos proporciona m soluciones linealmente independientes. Si $d > 1$, procediendo por el método descrito más arriba con el mayor número posible de vectores linealmente independiente de $\ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^d \setminus \ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{d-1}$ obtenemos, al menos, d soluciones linealmente independientes, una de las que ya teníamos y $d-1$ nuevas. Si con todas estas soluciones tenemos ya un conjunto fundamental hemos terminado. Si no es así, entonces $d < m$ y teniendo en cuenta que, como se comprueba fácilmente, los vectores $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_d$ elegidos como en (4.31) son vectores de $\ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^d$ linealmente independientes, existe, al menos, un vector $\mathbf{u} \in \ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^d$ tal que el conjunto $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_d,\mathbf{u}$ es linealmente independiente. De entre todas las posibles elecciones de $\mathbf{u}$ se elige este de manera que $\mathbf{u} \in \ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{d'} \setminus \ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{d'-1}$ con d' máximo. Y se repite el proceso anterior para obtener ahora d' nuevas soluciones que se comprueba fácilmente que son linealmente independientes no sólo entre sí, sino también con las anteriores. Si no hemos llegado a m soluciones el proceso continua hasta llegar a ese número.

Si el autovalor es complejo el proceso anterior nos proporciona un conjunto linealmente independiente de soluciones complejas. Las partes real e imaginaria de dichas soluciones nos proporcionan, como hemos visto anteriormente, un conjunto de soluciones reales linealmente independientes. En ambos casos el número de soluciones coincide con la multiplicidad del autovalor.

Para concluir es suficiente con aplicar el proceso previo a cada autovalor ya que los conjuntos de soluciones correspondientes a distintos autovalores son linealmente independientes.

Veamos mediante un par de ejemplos cómo se aplica de forma práctica el método que acabamos de describir.

Ejemplo 4.2.10. Sea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Queremos encontrar un conjunto fundamental de soluciones del sistema

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}. \tag{4.33}$$

La ecuación característica de la matriz $\mathbf{A}$ es

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$$

que tiene dos soluciones, una doble, $\lambda = 1$, y otra simple, $\lambda = 2$.

Comenzamos hallando $\ker(\mathbf{A}-\mathbf{I})$, Buscamos los vectores $\mathbf{v}$ tales que

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Esto implica que $v_2 = v_3 = 0$ y que v_1 es arbitrario. Por lo tanto $\ker(\mathbf{A}-\mathbf{I})$ tiene dimensión 1. Como es menor que la multiplicidad del autovalor, que es 2, hallamos $\ker(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2$. Este es el conjunto de vectores $\mathbf{v}$ que satisfacen

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2\mathbf{v} = (\mathbf{A}-\mathbf{I})\begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Esto implica que $v_3 = 0$ y que v_1 y v_2 son arbitrarios. Por lo tanto $\ker(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2$ tiene dimensión 2, que coincide con la multiplicidad del autovalor $\lambda = 1$. Elegimos un vector $\mathbf{v} \in \ker(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2 \setminus \ker(\mathbf{A}-\mathbf{I})^1$, por ejemplo $\mathbf{v} = (0,1,0)$. Aplicando el método que precede a este ejemplo, particularizando (4.26) y (4.31) para nuestro caso, llegamos a que las funciones

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(x) =& e^x(\mathbf{A}-\mathbf{I})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{y}_2(x) =& xe^x(\mathbf{A}-\mathbf{I})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = xe^x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

son dos soluciones de (4.33) linealmente independientes.

La tercera solución la obtenemos del otro autovalor. Una autovector $\mathbf{v}$ correspondiente a $\lambda = 2$ ha de verificar

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 - v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Esto implica que $v_1 = v_2 = 0$ y que v_3 es arbitrario. Uno de estos vectores es $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$. Según vimos al principio de esta sección

$$\mathbf{y}_3(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es la tercera solución que nos faltaba para tener un conjunto fundamental de soluciones de (4.33).

Ejemplo 4.2.11. Consideremos el sistema

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \tag{4.34}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica de $\mathbf{A}$ es

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -3-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\
&\qquad = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 2 & -3-\lambda & 1 \\ -2 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\
&\qquad = -\lambda\big[-\lambda(\lambda+4)(\lambda+2) - 4 - 2\lambda\big] + \lambda(4+2\lambda) \\
&\qquad = \lambda(\lambda+2)\big[\lambda(\lambda+2)+4\big] = \lambda(\lambda+2)^3 = 0.
\end{aligned}$$

que tiene dos raíces, una simple, $\lambda = 0$, y $\lambda = -2$ de multiplicidad 3.

El vector $\mathbf{v} = (a, b, c, d)$ verifica que

$$(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + c \\ 2b + d \\ -2a + 2b - c + d \\ 2a - 2b + c - d \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

si, y sólo si,

$$\begin{cases} 2a + c = 0 \\ 2b + d = 0 \end{cases}$$

(obsérvese que las dos últimas filas del vector $(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})\mathbf{v}$ son combinaciones lineales de las dos primeras). En consecuencia, $\ker(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})$ está formado por todos los vectores $\mathbf{v}$ de la forma $(a, b, -2a, -2b)$ con a y b reales arbitrarios y, por lo tanto, es un subespacio vectorial de dimensión 2. Podemos entonces elegir dos autovectores, correspondientes a $\lambda = -2$, linealmente independientes. Como la multiplicidad de este autovalor es tres, necesitamos un vector $\mathbf{v}_2 \in \ker(\mathbf{A}+2\mathbf{I})^2 \setminus \ker(\mathbf{A}+2\mathbf{I})$. Un vector $\mathbf{v} = (a, b, c, d)$ pertenece a $\ker(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})^2$ si, y sólo si,

$$(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})^2\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a + c \\ 2b + d \\ -2a + 2b - c + d \\ 2a - 2b + c - d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a + 2b + c + d \\ 2a + 2b + c + d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Podemos elegir entonces como $\mathbf{v}_2$ el vector $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1, -1)$. Se tiene entonces que el vector $(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})\mathbf{v} = (1, -1, -2, 2)$ es un autovector correspondiente a $\lambda = -2$. El vector $(1, 0, -2, 0)$ es otro autovector linealmente independiente del anterior. Por lo visto anteriormente las funciones

$$\mathbf{y}_1(x) = e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_2(x) = e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_3(x) = xe^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{-2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

son tres soluciones linealmente independientes de (4.34). Para hallar una cuarta solución linealmente independiente de las anteriores, buscamos un autovector $\mathbf{v}$ de $\lambda = 0$. Dicho autovector $\mathbf{v} = (a, b, c, d)$ ha de ser solución de la ecuación vectorial

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \\ -2a + 2b - 3c + d \\ 2a - 2b + c - 3d \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Por lo tanto $\mathbf{v} = a(1, 1, 0, 0)$ con a real. Si elegimos, por ejemplo, el vector

$\mathbf{v} = (1, 1, 0, 0)$, obtenemos la cuarta solución buscada:

$$\mathbf{y}_4(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.3. Matriz fundamental de un sistema lineal

Hemos visto en 4.1.1 que el conjunto de las soluciones de un sistema lineal homogéneo de orden n es un espacio vectorial de dimensión n. Una base de dicho espacio vectorial es lo que denominamos conjunto fundamental de soluciones. En el estudio de dichos espacios vectoriales son especialmente útiles las matrices formadas con los vectores de una base.

Definición 4.3.1. Se dice que la matriz $\mathbf{\Phi}$ es una **matriz fundamental** del sistema lineal homogéneo de orden n

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} \tag{4.35}$$

en un intervalo I, si sus columnas constituyen un conjunto fundamental de soluciones del sistema (4.35) en dicho intervalo.[7]

Si $\mathbf{\Phi}$ es una matriz cuadrada de columnas $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$, entonces

$$\det(\mathbf{\Phi}) = W[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n]$$

En particular, si $\mathbf{\Phi}$ es una matriz fundamental de un sistema lineal en un intervalo, su determinante no se anula en ningún punto de dicho intervalo. Recíprocamente, si una matriz cuadrada cuyas columnas son soluciones de un sistema (4.35) tiene determinante no nulo entonces sus columnas son un conjunto fundamental de soluciones del sistema. Podemos resumir lo anterior en el siguiente teorema.

Teorema 4.3.2. *Sea $\mathbf{\Phi}$ una matriz cuadrada cuyas columnas son soluciones del sistema*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} \tag{4.36}$$

en un intervalo I. Las tres condiciones siguientes son equivalentes:

a) *La matriz $\mathbf{\Phi}$ es una matriz fundamental del sistema (4.36) en I.*

b) *Existe un $x_0 \in I$ tal que* $\det(\mathbf{\Phi}(x_0)) \neq 0$.

c) $\det \mathbf{\Phi}$ *no se anula en I.*

[7] Esta última condición implica que la matriz ha de ser cuadrada de orden n.

Si $\mathbf{\Phi}$ es una matriz fundamental del sistema (4.36), el teorema 4.1.10 nos dice que la solución general del sistema viene dada por la fórmula

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{c} \tag{4.37}$$

donde $\mathbf{c}$ es un vector constante arbitrario

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Supongamos que $\mathbf{\Psi}$ es una matriz y que $\bar{\mathbf{y}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{y}}_n$ son sus vectores columna. Según acabamos de observar, estos vectores son soluciones de (4.36) si, y sólo si, para cada $j = 1, \ldots, n$ existe un vector constante

$$\mathbf{c}_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}$$

tal que

$$\bar{\mathbf{y}}_j(x) = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{c}_j.$$

Si $\mathbf{C}$ es la matriz de columnas los vectores $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$, las relaciones anteriores se pueden expresar mediante la igualdad

$$\mathbf{\Psi}(x) = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{C}.$$

Como las matrices fundamentales tienen determinante no nulo se deduce que $\det \mathbf{C} \neq 0$ si, y sólo si, $\det(\mathbf{\Psi}(x)) \neq 0$, lo que, a su vez, es equivalente a que $\mathbf{\Psi}$ sea una matriz fundamental. Hemos demostrado así el siguiente resultado.

Proposición 4.3.3. *Sea $\mathbf{\Phi}$ una matriz fundamental del sistema*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}. \tag{4.38}$$

a) *Si $\mathbf{C}$ es una matriz constante de determinante no nulo entonces la matriz $\mathbf{\Phi C}$ es también una matriz fundamental de (4.38).*

b) *Si $\mathbf{\Psi}$ es otra matriz fundamental de (4.38) entonces existe una matriz constante $\mathbf{C}$, con determinante no nulo, tal que $\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Phi C}$.*

Como el producto de matrices no es conmutativo, puede ocurrir que para una matriz constante dada, $\mathbf{C}$, con determinante no nulo, el producto $\mathbf{C\Phi}$ no sea una matriz fundamental.

La matriz fundamental de un sistema nos proporciona un método sencillo de calcular la solución de cualquier problema de valor inicial. En efecto, si queremos hallar la solución de (4.36) que satisface la condición inicial

$\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$, el problema se reduce a hallar el vector $\mathbf{c}$ que satisface (4.37) para dicha solución. Como las matrices fundamentales son inversibles se tiene que

$$\big[\boldsymbol{\Phi}(x_0)\big]^{-1}\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{c}$$

por lo que la solución del problema de valor inicial es

$$\mathbf{y}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\big[\boldsymbol{\Phi}(x_0)\big]^{-1}\mathbf{y}(x_0). \tag{4.39}$$

4.3.1. Exponencial de una matriz

En esta sección vamos a estudiar la posibilidad de construir una matriz fundamental de un sistema lineal con coeficientes constantes

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \tag{4.40}$$

directamente a partir de los coeficientes de la matriz $\mathbf{A}$ sin necesidad de aplicar los métodos de la sección precedente para calcular un conjunto fundamental de soluciones.

Hemos visto en el capítulo 2 que la solución general de la ecuación lineal homogénea de primer orden $y' = ay$ es $y(x) = ce^{ax}$. Parece que, por analogía con lo anterior, la solución de (4.40) debería ser $\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{A}x}\mathbf{c}$. Sin embargo esta última expresión nos plantea una cuestión previa: ¿qué se entiende por $e^{\mathbf{A}x}$ si $\mathbf{A}$ es una matriz?

Dado que en el conjunto de las matrices $n \times n$, $\mathscr{M}_n$, hay definido un producto por escalares y un producto entre matrices se pueden definir de manera obvia los polinomios en dicho espacio. Como además $\mathscr{M}_n$ se puede identificar como espacio vectorial con $\mathbb{R}^{n^2}$ en el caso real y $\mathbb{C}^{n^2}$ en el caso complejo, se tiene también definido el concepto límite. Con estas premisas, dado que la exponencial de un número complejo z se define mediante la serie

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

parece natural definir la **exponencial** de la matriz $\mathbf{A}$ como

$$e^{\mathbf{A}} = \lim_{N\to\infty}\left[\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathbf{A}^n}{n!}\right] \tag{4.41}$$

Se puede demostrar sin excesiva dificultad que el límite de la derecha existe.

Es inmediato, a partir de la definición, que la exponencial de una matriz real también es una matriz real. Otras consecuencias inmediatas de la definición de la exponencial son:

Proposición 4.3.4. *Sean* $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$ *y* $\lambda \in \mathbb{C}$. *entonces:*

a) $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$

b) $e^{\lambda \mathbf{I}} = e^{\lambda}\, \mathbf{I}$

c) *Si existe un entero positivo k tal que $\mathbf{A}^k = 0$,*[8] *entonces*

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{1!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^{k-1}}{(k-1)!}$$

El apartado b) es un caso particular de la siguiente proposición.

Proposición 4.3.5. *Si la matriz $\mathbf{A}$ es diagonal*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

su exponencial también es una matriz diagonal

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

En general no es sencillo calcular la exponencial de una matriz, sin embargo hay algunos casos donde esto se puede hacer de manera más o menos sencilla.

Ejemplo 4.3.6. Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$a, b \in \mathbb{R}$, su exponencial es

$$e^{\mathbf{A}} = e^{a} \begin{pmatrix} \cos b & -\operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix} \tag{4.42}$$

Para comprobar esto es suficiente observar que el conjunto de las matrices reales 2×2 de este tipo[9] es un cuerpo isomorfo a $\mathbb{C}$ mediante el isomorfismo[10]

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \longleftrightarrow a + bi.$$

[8] Una matriz que tiene esa propiedad se dice que es **nilpotente**.

[9] Estas matrices se denominan matrices de Cayley.

[10] La suma y el producto de estas matrices se corresponden mediante este isomorfismo con la suma y el producto, respectivamente, de números complejos.

Así

$$\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{N} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} \longleftrightarrow 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{(a+bi)^n}{n!}$$

y, como, obviamente, la convergencia en el espacio de las matrices se corresponde, mediante el isomorfismo anterior, con la convergencia en $\mathbb{C}$ se concluye que

$$e^{\mathbf{A}} \longleftrightarrow e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

de donde se sigue (4.42).

Ejemplo 4.3.7. Sea $\mathbf{N} \in \mathscr{M}_n$ la matriz

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

que tiene unos en la linea encima de la diagonal y el resto ceros. Si denotamos por $\mathbf{e}_k$ al vector columna que tiene un 1 en la fila k y 0 en las demás, se verifica que

$$\mathbf{N}\mathbf{e}_1 = \mathbf{0},\ \mathbf{N}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{N}\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{k-1}, \ldots, \mathbf{N}\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_{n-1}.$$

Iterando el proceso se tiene que, si $j = 1, 2, \ldots, n$ entonces

$$\mathbf{N}^j\mathbf{e}_k = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant j \\ \mathbf{e}_{k-j} & \text{si } j < k \leqslant n \end{cases}$$

Como el producto de una matriz por el vector $\mathbf{e}_k$ es precisamente la columna k-ésima de la matriz, si denotamos una matriz escribiendo entre corchetes sus vectores columnas, se tiene que

$$\mathbf{N}^j = [\mathbf{N}^j\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{N}^j\mathbf{e}_n] = [\underbrace{\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}}_{j}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-j}]$$

En particular $\mathbf{N}^n = \mathbf{0}$.

Si $x \in \mathbb{R}$, aplicando 4.3.4 c, se tiene que

$$
\begin{aligned}
e^{\mathbf{N}\mathbf{x}} &= \mathbf{I} + \frac{\mathbf{N}x}{1!} + \cdots + \frac{\mathbf{N}^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!} = \\
&= [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n] + \frac{x}{1!}[\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}] + \frac{x^2}{2!}[\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-2}] + \\
&\quad + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-2)!}[\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}[\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}, \mathbf{e}_1] = \\
&= \left[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 + \frac{x}{1!}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 + \frac{x}{1!}\mathbf{e}_2 + \frac{x^2}{2!}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n + \frac{x}{1!}\mathbf{e}_{n-1} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{e}_1\right] = \\
&= \left[\mathbf{e}_1, \frac{x}{1!}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \frac{x^2}{2!}\mathbf{e}_1 + \frac{x}{1!}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \ldots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{e}_1 + \cdots + \frac{x}{1!}\mathbf{e}_{n-1} + \mathbf{e}_n\right]
\end{aligned}
$$

o, representada en forma de matriz

$$
e^{\mathbf{N}\mathbf{x}} = \begin{pmatrix}
1 & x & \frac{x^2}{2!} & & \cdots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
0 & 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & & 0 & 1 & x & \frac{x^2}{2!} \\
 & & & 0 & 1 & x \\
 & & & & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

Las siguientes propiedades de la exponencial de una matriz también se demuestran sin mucha dificultad.

Proposición 4.3.8. *Sean* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathscr{M}_n$. *Entonces:*

a) *Si* $\mathbf{P} \in \mathscr{M}_n$ *es inversible y* $\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$, *entonces*

$$e^{\mathbf{M}} = \mathbf{P}\, e^{\mathbf{A}}\, \mathbf{P}^{-1}$$

b) *Si* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ *entonces*

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}\, e^{\mathbf{B}}$$

c) *La exponencial de una matriz es una matriz inversible y*

$$\left(e^{\mathbf{A}}\right)^{-1} = e^{-\mathbf{A}}$$

Con estos preparativos estamos en condiciones de demostrar que la función $e^{\mathbf{A}x}\mathbf{c}$ es la solución general de (4.40).

Proposición 4.3.9. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$*. La función*

$$x \longmapsto e^{\mathbf{A}x}$$

es derivable y su derivada es

$$\frac{d}{dx} e^{\mathbf{A}x} = \mathbf{A}\, e^{\mathbf{A}x}.$$

Demostración. Si $h \neq 0$, aplicando 4.3.8 b se tiene que

$$\frac{e^{\mathbf{A}(x+h)} - e^{\mathbf{A}x}}{h} = \frac{e^{\mathbf{A}h} - \mathbf{I}}{h}\, e^{\mathbf{A}x}$$

y, de la definición de exponencial, se deduce que

$$\frac{e^{\mathbf{A}h} - \mathbf{I}}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \mathbf{A}.$$

□

Corolario 4.3.10. *La matriz* $e^{\mathbf{A}x}$ *es una matriz fundamental del sistema*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}.$$

En la sección precedente vimos cómo calcular una matriz fundamental del sistema (4.40). Ahora vamos a ver cómo a partir de una matriz fundamental podemos calcular la exponencial de una matriz.

Teorema 4.3.11. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$*. Si* $\mathbf{\Phi}$ *es una matriz fundamental del sistema*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \tag{4.44}$$

entonces

$$e^{\mathbf{A}x} = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{0}). \tag{4.45}$$

Demostración. Como $e^{\mathbf{A}x}$ es una matriz fundamental, se deduce de 4.3.3 que existe una matriz $\mathbf{C} \in \mathscr{M}_n$ tal que

$$e^{\mathbf{A}x} = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{C}.$$

Particularizando esta expresión en $x = 0$, teniendo en cuenta que $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$, se obtiene que

$$\mathbf{I} = \mathbf{\Phi}(0)\mathbf{C}$$

de donde se sigue el resultado. □

Corolario 4.3.12. *Si* $\mathbf{y}$ *es una solución de (4.44) entonces*

$$\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{A}x}\mathbf{y}(0).$$

4.4. Sistemas lineales no homogéneos

En las secciones precedente hemos estudiado los sistemas lineales homogéneos. En esta sección nos vamos a centrar en los sistemas no homogéneos. Vimos en 4.1.2 que la solución general de un sistema lineal no homogéneo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x) \tag{4.46}$$

tiene la forma

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}_h(x) + \mathbf{y}_p(x) \tag{4.47}$$

donde $\mathbf{y}_h$ es la solución general del sistema lineal homogéneo asociado y $\mathbf{y}_p$ es una solución particular de (4.46). Ya hemos visto algunos métodos para hallar las soluciones de sistemas homogéneos, vamos a ver ahora cómo hallar una solución particular de (4.46).

4.4.1. Método de variación de las constantes

La idea de este método es la misma que la del método del mismo nombre para ecuaciones lineales de orden n. Sabemos que si $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ es un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo asociado

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} \tag{4.48}$$

la solución general de dicho sistema es

$$\mathbf{y}_h(x) = c_1\mathbf{y}_1(x) + \cdots + c_n\mathbf{y}_n(x).$$

El método de variación de las constantes consiste en reemplazar las constantes que aparecen en esa solución general por funciones y ver si alguna de las funciones resultantes, que será de la forma

$$\mathbf{y}_p(x) = u_1(x)\mathbf{y}_1(x) + \cdots + u_n(x)\mathbf{y}_n(x),$$

es solución de (4.46). Si $\mathbf{\Phi}$ es la matriz fundamental con vectores columna $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ y $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, podemos escribir la función y_p en la forma

$$\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{u}(x). \tag{4.49}$$

Tenemos que determinar, si es posible, una función $\mathbf{u}$ para la que $\mathbf{y}_p$ sea una solución de (4.48). Sustituyendo $\mathbf{y}_p$ y su derivada en (4.46) se tiene que

$$\mathbf{\Phi}'(x)\mathbf{u}(x) + \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{u}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{\Phi}(x)\mathbf{u}(x) + \mathbf{b}(x). \tag{4.50}$$

Pero como $\mathbf{\Phi}$ es una matriz fundamental de (4.48)

$$\mathbf{\Phi}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{\Phi}(x).$$

Así la ecuación (4.50) se reduce a

$$\mathbf{\Phi}(x)\mathbf{u}'(x) = \mathbf{b}(x). \tag{4.51}$$

Como $\mathbf{\Phi}(x)$ es una matriz inversible

$$\mathbf{u}'(x) = \mathbf{\Phi}(x)^{-1}\mathbf{b}(x).$$

Integrando se obtiene

$$\mathbf{u}(x) = \int \mathbf{\Phi}(x)^{-1}\mathbf{b}(x)\,dx.$$

Podemos resumir lo anterior en el siguiente teorema.

Teorema 4.4.1. *Sea $\mathbf{\Phi}$ una matriz fundamental del sistema homogéneo*

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}$$

en algún intervalo I, donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{b}$ son funciones continuas, y sea $x_0 \in I$. Entonces la solución general del sistema no homogéneo

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

en I es

$$\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{c} + \mathbf{\Phi}(x)\int_{x_0}^{x} \mathbf{\Phi}(s)^{-1}\mathbf{b}(s)\,ds \tag{4.52}$$

donde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante arbitrario.

En particular

$$\mathbf{y}_p(x) = \mathbf{\Phi}(x)\left(\mathbf{\Phi}(x_0)\right)^{-1}\mathbf{y}_0 + \mathbf{\Phi}(x)\int_{x_0}^{x} \mathbf{\Phi}(s)^{-1}\mathbf{b}(s)\,ds. \tag{4.53}$$

es la solución de (4.51) que vale $\mathbf{y}_0$ en x_0.

En el caso de un sistema lineal no homogéneo con coeficientes constantes

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

si elegimos como matriz fundamental la matriz $e^{\mathbf{A}x}$ la ecuación (4.53) se simplifica considerablemente porque $\left(e^{\mathbf{A}x}\right)^{-1} = e^{-\mathbf{A}x}$, y queda

$$\mathbf{y}_p(x) = e^{\mathbf{A}(x-x_0)}\mathbf{y}_0 + e^{\mathbf{A}x}\int_{x_0}^{x} e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{b}(s)\,ds. \tag{4.54}$$

Ejemplo 4.4.2. Vamos a resolver el problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} - \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix} x e^{-2x}, \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{4.55}$$

En el ejemplo 4.2.4 hallamos la solución general del sistema homogéneo asociado. La matriz fundamental correspondiente es

$$\mathbf{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} 2e^{5x} & e^{-2x} \\ e^{5x} & -3e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Como

$$(\mathbf{\Phi}(0))^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

por 4.3.11

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}x} = \mathbf{\Phi}(x)\,(\mathbf{\Phi}(0))^{-1} &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2e^{5x} & e^{-2x} \\ e^{5x} & -3e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6e^{5x} + e^{-2x} & 2e^{5x} - 2e^{-2x} \\ 3e^{5x} - 3e^{-2x} & e^{5x} + 6e^{-2x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La fórmula (4.54) nos da la solución particular

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_p(x) =& e^{\mathbf{A}x} \left[\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \int_0^x e^{-\mathbf{A}s} \mathbf{b}(s)\, ds \right] \\ =& e^{\mathbf{A}x} \left[\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} \int_0^x \begin{pmatrix} 6e^{-5s} + e^{2s} & 2e^{-5s} - 2e^{2s} \\ 3e^{-5s} - 3e^{2s} & e^{-5s} + 6e^{2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix} s e^{-2s}\, ds \right] \\ =& e^{\mathbf{A}x} \left[\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} - \int_0^x \begin{pmatrix} 14se^{-7s} + s \\ 7se^{-7s} - 3s \end{pmatrix} ds \right] \\ =& e^{\mathbf{A}x} \left[\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 28xe^{-7x} + 4e^{-7x} - 4 - 7x^2 \\ 14xe^{-7x} + 2e^{-7x} - 2 + 21x^2 \end{pmatrix} \right] \\ =& \frac{1}{14} \begin{pmatrix} e^{-2x}(6 + 28x - 7x^2) + 92e^{5x} \\ e^{-2x}(-4 + 14x + 21x^2) + 46e^{5x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.4.2. Método de los coeficientes indeterminados

Como en el caso se las ecuaciones lineales, en el caso de sistemas lineales con coeficientes constantes, cuando la función $\mathbf{b}$ es una combinación lineal con coeficientes constantes de productos de polinomios con coeficientes vectoriales, exponenciales, senos y cosenos, se puede utilizar el método de los coeficientes indeterminados para hallar una solución particular del sistema. El método es esencialmente el mismo que en el caso de ecuaciones, cambiando escalares por vectores, con una única diferencia. Si la función $\mathbf{b}$ es de la forma

$$\mathbf{b}(x) = e^{\alpha x} \left(\mathbf{P}_1(x) \cos \beta x + \mathbf{Q}_1(x) \operatorname{sen} \beta x \right),$$

con $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{Q}_1$ polinomios, y $\lambda = \alpha + \beta i$ es un autovalor de multiplicidad m, en lugar de aparecer sólo un factor x^m en la solución particular que se busca, han de aparecer también las potencias menores, por lo que dicha solución particular será de la forma

$$\mathbf{y}_p(x) = e^{\alpha x}\left[\mathbf{P}(x)\cos\beta x + \mathbf{Q}(x)\operatorname{sen}\beta x\right]$$

donde $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son dos polinomios, con coeficientes vectoriales, y de grado $k+m$ siendo k el máximo de los grados de los polinomios $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{Q}_1$.

Ejemplo 4.4.3. Consideremos el sistema no homogéneo

$$\begin{cases} y_1' =4y_1 + 2y_2 - 15xe^{-2x} \\ y_2' =3y_1 - y_2 - 4xe^{-2x} \end{cases}$$

o, expresado en forma matricial:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{y} - \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix} xe^{-2x}.$$

Vimos en el ejemplo 4.2.4 que $\lambda = -2$ es un autovalor, de multiplicidad 1, de la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Vamos a buscar por tanto una solución de la forma

$$\mathbf{y}_p(x) = (\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 x + \mathbf{b}_2 x^2)e^{-2x}.$$

Sustituyendo esta solución en la ecuación y eliminando la exponencial se tiene

$$(\mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_0) + (2\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_1)x - 2\mathbf{b}_2 x^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 x + \mathbf{b}_2 x^2) - \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix} x$$

e igualando coeficientes

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_0 &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{b}_0 \\ 2\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_1 &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{b}_1 - \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix} \\ -2\mathbf{b}_2 &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{b}_2 \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{b}_0 =\mathbf{b}_1 \tag{4.56}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{b}_1 =2\mathbf{b}_2 + \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{4.57}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{b}_2 =\mathbf{0} \tag{4.58}$$

Poniendo $\mathbf{b}_j = (u_j, v_j)$, $j = 0, 1, 2$, se tiene, sustituyendo en (4.58), que

$$3u_2 + v_2 = 0.$$

Hay infinitas soluciones $\mathbf{b}_2 = (a, -3a)$ con $a \in \mathbb{R}$. De (4.57) se deduce que

$$2a + 15 = 2(-6a + 4)$$

lo que implica que $a = -\frac{1}{2}$. Por tanto $\mathbf{b}_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Sustituyendo este valor en (4.57) se obtiene que

$$3u_1 + v_1 = 7.$$

De (4.56) se deduce que $u_1 = 2v_1$ que junto con la relación previa nos da que $v_1 = 1$ y $u_1 = 2$ y, por tanto, $\mathbf{b}_1 = (2, 1)$. Sustituyendo en (4.56) se tiene que

$$3u_0 + v_0 = 1.$$

Eligiendo $\mathbf{b}_0 = (0, 1)$ obtenemos la solución particular, dada en forma vectorial,

$$\mathbf{y}_p(x) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} x^2 \right] e^{-2x}.$$

o, expresada en los términos del sistema inicial,

$$\begin{cases} y_{p,1}(x) = \left(2x - \dfrac{1}{2}x^2 \right) e^{-2x} \\ y_{p,2}(x) = \left(1 + x + \dfrac{3}{2}x^2 \right) e^{-2x} \end{cases}$$

4.5. Comportamiento cualitativo de las soluciones

Hemos señalado con anterioridad que en la mayoría de los casos no es posible obtener un conocimiento explícito de las soluciones de una ecuación diferencial o de un sistema de ecuaciones. Incluso cuando esto es posible, como en el caso de los sistemas lineales con coeficientes constantes, ocurre que en muchas ocasiones los cálculos necesarios para obtener las soluciones son tan complicados que las hace impracticables. Sin embargo, en muchas aplicaciones más que el conocimiento explícito de las soluciones, lo que realmente interesa es el conocimiento de determinadas propiedades cualitativas de las mismas. Por ejemplo, podemos estar interesados en saber si existen soluciones constantes, que denominamos **puntos de equilibrio**, o si las hay periódicas, si las soluciones que en algún momento están próximas lo siguen estando posteriormente, este es el problema de **estabilidad** de las soluciones. También podemos estar interesados en conocer cuál es el comportamiento de las soluciones cuando la variable tiende a infinito. Todas estas son cuestiones de gran importancia en la práctica que, en muchas ocasiones, pueden ser contestadas directamente a partir de la propia ecuación diferencial, o del sistema de ecuaciones, sin necesidad de conocer explícitamente las soluciones.

En esta sección y las siguientes vamos a estudiar algunos aspectos cualitativos de las soluciones de un sistema lineal con coeficientes constantes.

Un punto $\mathbf{y}_0$ se dice que es un **punto de equilibrio** o **punto crítico**[11] del sistema

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \tag{4.59}$$

si la función constante $\mathbf{y}(x) \equiv \mathbf{y}_0$ es una solución del sistema.

Como una función es constante si, y sólo si, su derivada es nula, resulta que un punto $\mathbf{y}_0$ es un punto de equilibrio del sistema (4.59) si, y sólo si, $\mathbf{A}\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$.

El $\mathbf{0}$ siempre es un punto de equilibrio de un sistema lineal. Este es el único punto de equilibrio si, y sólo si, $\mathbf{A}$ es una matiz inversible. Esta condición es equivalente a que 0 no sea un autovalor de $\mathbf{A}$. Por lo tanto, si $\mathbf{0}$ no es el único punto de equilibrio el 0 es un autovalor de $\mathbf{A}$ y los restantes puntos de equilibrio son los autovectores correspondientes al autovalor 0.

4.6. Diagrama de fases de sistemas planos

Vamos a comenzar estudiando la teoría cualitativa de sistemas lineales planos.

Vimos en el primer capítulo cómo en el estudio de las ecuaciones diferenciales la representación gráfica de las soluciones es una herramienta de gran utilidad para su análisis cualitativo. Lo mismo sigue siendo cierto en el caso que nos ocupa. Existen diversas formas de representar gráficamente las soluciones de un sistema de dos ecuaciones. De forma análoga al caso de las ecuaciones individuales se pueden representar las gráficas de las funciones $x(t)$ e $y(t)$ soluciones del sistema o, considerando este como una ecuación vectorial, la gráfica de la función vectorial $(x(t), y(t))$. En el primer caso la representación tiene el problema de que no nos proporciona una visión conjunta del comportamiento del sistema. En el segundo caso, la gráfica es una curva en $\mathbb{R}^3$ que, en general, resulta menos clarificadora que una representación plana. Por todas estas consideraciones, en el estudio de los sistemas planos se suele utilizar lo que se denomina el diagrama de fases del sistema, que esencialmente consiste en representar las soluciones del sistema como las trazas de curvas paramétricas en el plano.

Consideremos el sistema plano

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \tag{4.60}$$

[11] También se suelen emplear las denominaciones **punto fijo** o **punto estacionario**.

o expresado en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{4.61}$$

Una solución $x(t), y(t)$ del sistema (4.60) determina una curva en $\mathbb{R}^2$

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto (x(t), y(t)) \, .$$

A la imagen de dicha curva se le denomina **órbita** o **trayectoria** de la solución. Por lo tanto la trayectoria de una solución es el subconjunto del plano $\{(x(t), y(t)) : \; t \in \mathbb{R}\}$. Se suele dar una interpretación dinámica a las trayectorias dibujando sobre ellas una flecha que indica el sentido en el que se mueven x e y cuando la variable t crece.

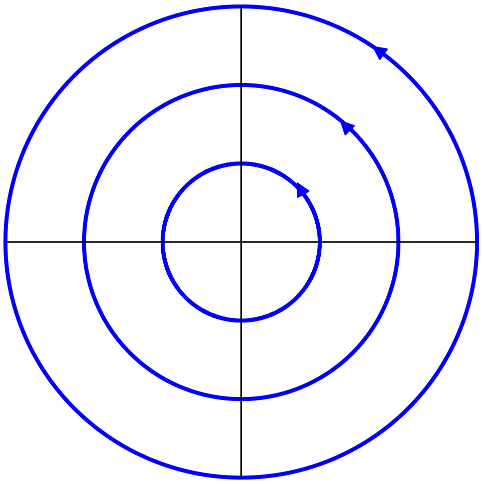


Figura 4.1: Trayectorias de las soluciones del sistema $x' = -y$, $y' = x$ correspondientes a los valores iniciales $(x(0), y(0)) = (1/3, 0)$, $(2/3, 0)$ y $(1, 0)$.

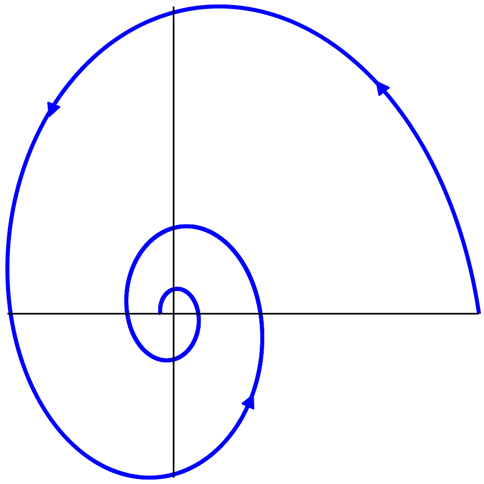


Figura 4.2: Trayectoria de una solución del sistema $x' = -x - 5y$, $y' = x - 5y$.

Al conjunto de todas las trayectorias de un sistema de ecuaciones diferenciales se le denomina **diagrama de fases** del sistema.[12] A continuación vamos a hacer un estudio de los distintos diagramas de fases que se pueden presentar. Para ello vamos a estudiar distintos casos.

Comenzaremos suponiendo que $\mathbf{0}$ es el único punto de equilibrio de (4.61). Hemos visto que en este caso 0 no es un autovalor de la matriz $\mathbf{A}$.

[12] En la práctica se suele representar el diagrama de fases esbozando unas cuantas trayectorias de soluciones del sistema de manera que nos permita tener una idea global del comportamiento del sistema. Con un pequeño abuso de lenguaje es habitual denominar también *diagrama de fases* a dichas representaciones.

4.6.1. Autovalores reales distintos

Sean λ y μ los dos autovalores de la matriz $\mathbf{A}$. Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ un autovector correspondiente a λ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ un autovector correspondiente a μ y sean ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 y ℓ_4 las cuatro semirrectas que parten del origen en las direcciones de los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $-\mathbf{u}$ y $-\mathbf{v}$, respectivamente.

Sabemos que la solución general del sistema (4.61) es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \mathbf{u} e^{\lambda t} + c_2 \mathbf{v} e^{\mu t}. \tag{4.62}$$

En particular, para cualquier valor de $c \in \mathbb{R}$ la función vectorial $c\mathbf{u}e^{\lambda t}$ es solución del sistema. Esta solución tiene la propiedad de que, para cada valor de t, es proporcional a $\mathbf{u}$ con factor de proporcionalidad $ce^{\lambda t}$. Si $c \neq 0$, el signo de este factor es el mismo que el de c. Además, cuando t recorre la recta real la exponencial $e^{\lambda t}$ recorre toda la semirrecta $(0, +\infty)$. En consecuencia, las trayectorias de las soluciones $c\mathbf{u}e^{\lambda t}$, cuando $c \neq 0$, son precisamente las semirrectas ℓ_1 si $c > 0$ y ℓ_3 si $c < 0$. Análogamente, las trayectorias de las soluciones $c\mathbf{v}e^{\mu t}$ son las semirrectas ℓ_2, si $c > 0$ y ℓ_4 si $c < 0$.

Vamos a estudiar, según los distintos casos que se pueden dar, cómo se recorren las soluciones y que aspecto tienen los correspondientes diagramas de fases.

Autovalores distintos y negativos.

Las soluciones se aproximan a $\mathbf{0}$ cuando t tiende a infinito. Cuando esto ocurre se dice que el $\mathbf{0}$ es un **atractor** del sistema.

Supongamos que $\mu < \lambda < 0$. Vamos a comenzar estudiando las soluciones de la forma $c\,\mathbf{u}e^{\lambda t}$ o $c\,\mathbf{v}e^{\mu t}$, con $c \neq 0$. En estos casos, cuando t varía de $-\infty$ a $+\infty$, el factor $ce^{\lambda t}$ va de $+\infty$ a 0 si $c > 0$ y de $-\infty$ a 0 si $c < 0$. Por lo tanto, las trayectorias se recorren de manera que cuando t avanza de $-\infty$ a $+\infty$ las correspondientes soluciones se van aproximando cada vez más a $\mathbf{0}$. En la figura 4.3 aparecen estas trayectorias en color rojo con una flecha sobre ellas indicando la dirección en la que se mueven las soluciones cuando t crece.

Consideremos ahora las restantes soluciones no nulas de (4.61). Vienen dadas por (4.62) con las constantes c_1 y c_2 distintas de cero. El vector $(x'(t), y'(t))$ es el vector de dirección de la tangente a la trayectoria de dicha solución en el punto correspondiente. Si la primera coordenada del vector $\mathbf{u}$ es no nula las pendientes de las tangentes verifican que

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{c_1 u_2 \lambda e^{\lambda t} + c_2 v_2 \mu e^{\mu t}}{c_1 u_1 \lambda e^{\lambda t} + c_2 v_1 \mu e^{\mu t}} = \frac{c_1 u_2 \lambda + c_2 v_2 \mu e^{(\mu - \lambda)t}}{c_1 u_1 \lambda + c_2 v_1 \mu e^{(\mu - \lambda)t}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{u_2}{u_1}.$$

Si $u_1 = 0$, el cociente $x'(t)/y'(t)$ converge a 0. En cualquier caso, lo anterior nos dice que cuando t se aproxima a infinito la trayectoria de la solución se

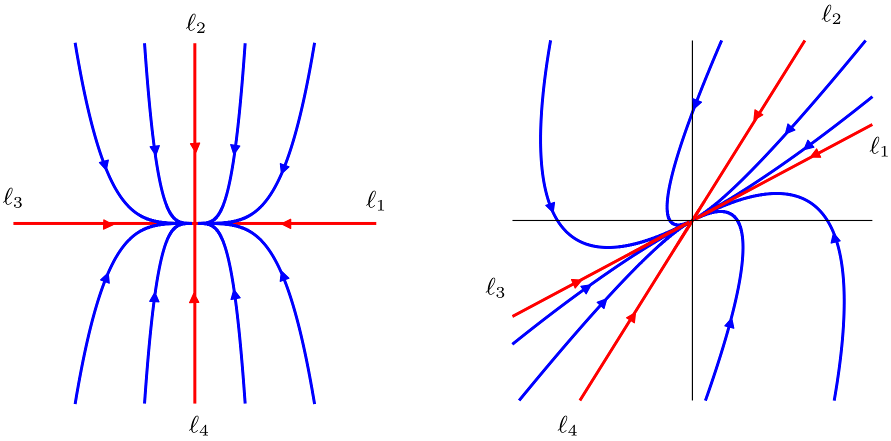


Figura 4.3: Dos ejemplos de diagramas de fases de nodos estables

aproxima al origen de manera que sus tangentes se aproximan a la semirrecta cuya pendiente es $\frac{u_2}{u_1}$ que es ℓ_1 si $c_1 > 0$ o ℓ_3 si $c_1 < 0$.

Por otro lado,

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{c_1 u_2 \lambda e^{\lambda t} + c_2 v_2 \mu e^{\mu t}}{c_1 u_1 \lambda e^{\lambda t} + c_2 v_1 \mu e^{\mu t}} = \frac{c_1 u_2 \lambda e^{(\lambda-\mu)t} + c_2 v_2 \mu}{c_1 u_1 \lambda e^{(\lambda-\mu)t} + c_2 v_1 \mu} \xrightarrow[t\to-\infty]{} \frac{v_2}{v_1}.$$

Si $v_1 = 0$, el cociente $x'(t)/y'(t)$ converge a 0. Esto nos dice que las trayectorias aparecen desde el infinito con tangentes aproximadamente paralelas a la dirección del vector $\mathbf{v}$.

La figura 4.3 muestra el aspecto del diagrama de fases de un par de sistemas de este tipo.

Podemos resumir todo lo anterior diciendo que el diagrama de fases del sistema (4.60) está formado por trayectorias de tres tipos: el origen, que es la trayectoria de la solución trivial, las semirrectas $\ell_1, \ldots, \ell_4$ y el resto de las trayectorias que son curvas que se aproximan a 0, cuando t tiende a infinito, todas en la misma dirección, la de la recta $\ell_1 \cup \ell_3$. En este caso se dice que el $\mathbf{0}$ es un **nodo estable**.

Obsérvese que todas las trayectorias de soluciones no triviales se aproximan a $\mathbf{0}$ pero este punto no pertenece a ninguna de ellas.

Autovalores distintos y positivos

En este caso las soluciones tienden en norma a ∞ cuando t tiende a $+\infty$. Cuando esto ocurre se dice que el $\mathbf{0}$ es una **fuente** del sistema.

Observemos que $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ es una solución de (4.61) si, y sólo si, $\mathbf{y}(t) = (x_1(-t), x_2(-t))$ es una solución del sistema

$$\mathbf{y}' = -\mathbf{A}\mathbf{y}. \tag{4.63}$$

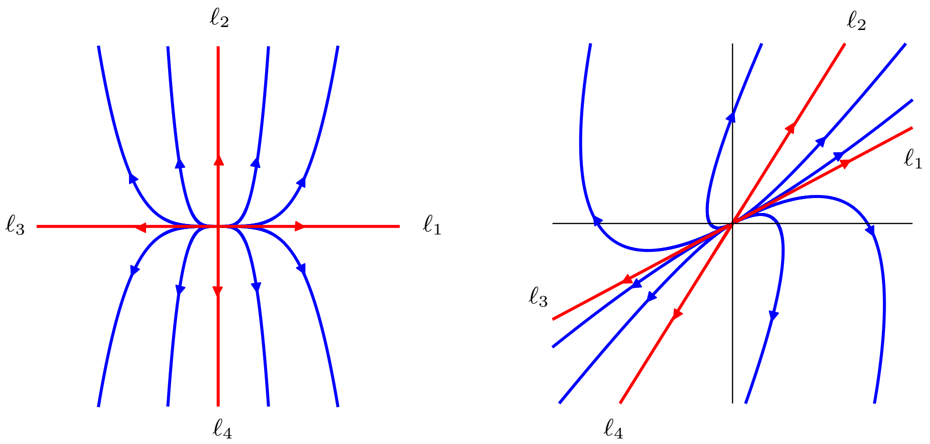


Figura 4.4: Diagramas de fases de nodos inestables

Este sistema es del tipo estudiado en el caso anterior. Ambas funciones vectoriales, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, tienen la misma trayectoria pero recorridas en sentido opuesto. Además los autovalores de $\mathbf{A}$ y de $-\mathbf{A}$ son opuestos y a ambos les corresponden los mismos autovectores. Por lo tanto, si $0 < \lambda < \mu$, el diagrama de fases en este caso es exactamente igual que el del sistema (4.63), excepto en el sentido en que se recorren las trayectorias que en este caso es el inverso al del caso anterior (véase la figura 4.4). Ahora las trayectorias no triviales salen del origen y se alejan de manera que no están acotadas cuando t tiende a $+\infty$. Además todas, salvo las que coinciden con las semirrectas ℓ_2 y ℓ_4, salen en la dirección de la recta $\ell_1 \cup \ell_3$.

En este caso el $\mathbf{0}$ se dice que es un **nodo inestable**.

Autovalores distintos y de signos opuestos

Supongamos que $\mu < 0 < \lambda$. Las soluciones de la forma $c\,\mathbf{u}e^{\lambda t}$ salen desde el origen y no están acotadas cuando t tiende a $+\infty$, mientras que las de la forma $c\,\mathbf{v}e^{\mu t}$ se aproximan a $\mathbf{0}$ cuando t tiende a infinito (véase la figura 4.5).

Si $(x(t), y(t))$ es una solución de la forma (4.62) con c_1 y c_2 no nulas, su trayectoria no está acotada cuando t tiende a $+\infty$ y, en este caso, se aproxima a ℓ_1 o a ℓ_3 dependiendo de que c_1 sea mayor o menor que 0. Además, se comprueba, de forma análoga a como lo hicimos en 4.6.1. que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{u_2}{u_1}$$

si $u_1 \neq 0$ y que $\lim_{t\to+\infty} \frac{x'(t)}{y'(t)} = 0$ si $u_1 = 0$. Esto nos dice la recta $\ell_1 \cup \ell_3$ es una asíntota de la trayectoria cuando t tiende a $+\infty$. Análogamente la trayectoria tampoco está acotada cuando t tiende a $-\infty$ y, en este caso, se

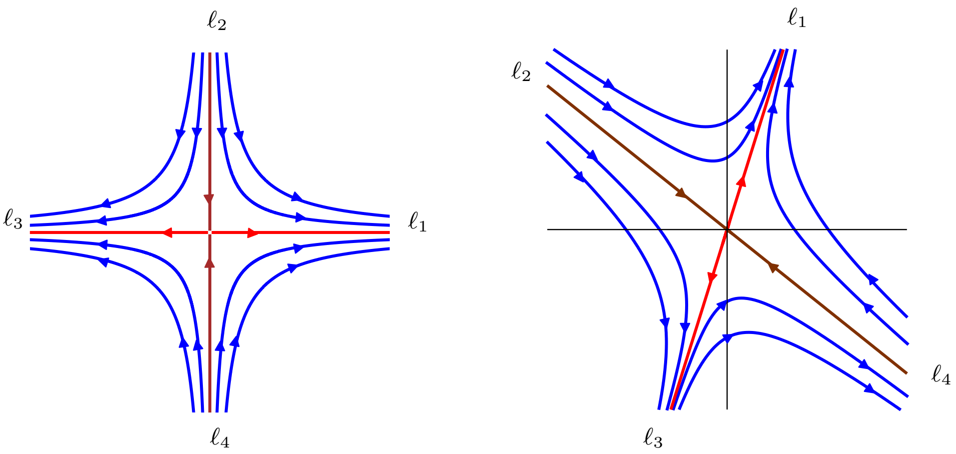


Figura 4.5: Diagrama de fases de un punto de silla

aproxima a ℓ_2 o a ℓ_4 dependiendo de que c_1 sea mayor o menor que 0. Además,

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{v_2}{v_1}$$

si $v_1 \neq 0$ y $\lim_{t\to-\infty} \frac{x'(t)}{y'(t)} = 0$ si $v_1 = 0$. Esto nos dice la recta $\ell_2 \cup \ell_4$ es una asíntota de la trayectoria cuando t tiende a $-\infty$. En consecuencia el diagrama de fases de (4.61) tiene la forma que aparece representada en la figura 4.5.

En este caso se dice que $\mathbf{0}$ es un **punto de silla**.

4.6.2. Un único autovalor real

Sea λ el único autovalor. Si $\lambda < 0$ el origen es un atractor y si $\lambda > 0$ es una fuente.

En este caso el diagrama de fases depende de que la dimensión del núcleo $\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ sea dos o uno.

Autovalor doble negativo con dos autovectores linealmente independientes

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos autovectores linealmente independientes, la solución general de (4.61) es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1\,\mathbf{u}e^{\lambda t} + c_2\,\mathbf{v}e^{\lambda t} = (c_1\,\mathbf{u} + c_2\,\mathbf{v})e^{\lambda t}. \tag{4.64}$$

Cada una de estas soluciones tiene su trayectoria contenida en una de las dos semirrectas que parten del origen con dirección $c_1\,\mathbf{u} + c_2\,\mathbf{v}$. El diagrama de fases de (4.61) aparece representado en la figura 4.6

En este caso se dice que $\mathbf{0}$ es un **punto estrella estable**.

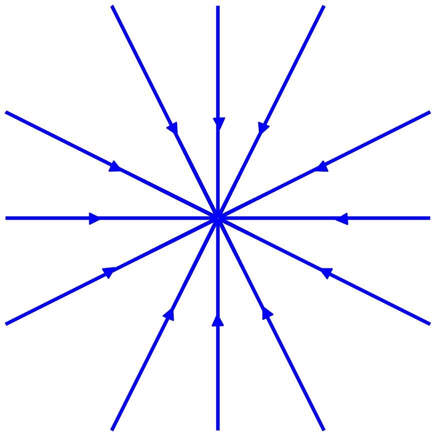


Figura 4.6: Diagrama de fases de un punto estrella estable

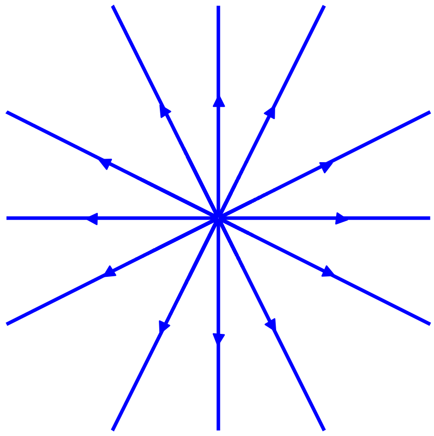


Figura 4.7: Diagrama de fases de un punto estrella inestable

Autovalor doble positivo con dos autovectores linealmente independientes

El diagrama de fases es exactamente igual que el del caso precedente, excepto que la dirección en que se recorren las trayectorias se invierte. El diagrama de fases aparece representado en la figura 4.7.

En este caso se dice que $\mathbf{0}$ es un **punto estrella inestable**.

Autovalor doble negativo con sólo un autovector linealmente independientes

Si la dimensión de $\ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ es uno, como la dimensión de $\ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2$ es dos, existe un vector $\mathbf{v} \in \ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2 \setminus \ker(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$. Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2) = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}$ entonces $\mathbf{u}$ es un autovector correspondiente a λ y la solución general de (4.61) es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1\,\mathbf{u}e^{\lambda t} + c_2\,(\mathbf{v}+t\mathbf{u})e^{\lambda t} = \big(c_1\,\mathbf{u} + c_2\,(\mathbf{v}+t\mathbf{u})\big)e^{\lambda t}. \tag{4.65}$$

Las semirrectas que parten de $\mathbf{0}$ y direcciones $\mathbf{u}$ y $-\mathbf{u}$, ℓ y ℓ' respectivamente, son las trayectorias de las soluciones correspondientes a $c_2 = 0$. Si $c_2 \neq 0$ y $u_1 \neq 0$ entonces

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{u_2}{u_1}.$$

Si $u_1 = 0$, $\lim_{t\to\pm\infty} \frac{x'(t)}{y'(t)} = 0$. Esto nos dice que las tangentes de las trayectorias de las soluciones con $c_2 \neq 0$ se aproximan, cuando t tiende a $+\infty$, a

$\mathbf{0}$ en la dirección de $\mathbf{u}$ o de $-\mathbf{u}$, dependiendo del valor de c_2 Por otra parte, cuando t tiende a $-\infty$, las trayectorias se aproximan a la dirección opuesta. El diagrama de fases en este caso puede tener una de las dos formas que aparecen representadas en la figura 4.8. Para determinar cuál de las dos

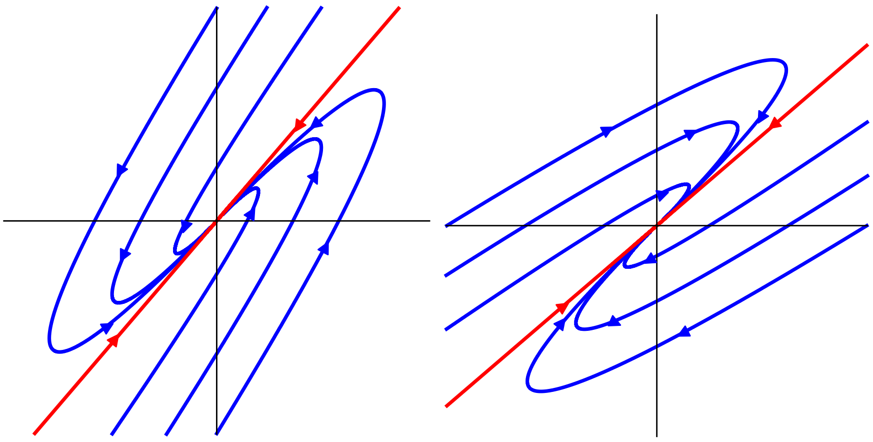


Figura 4.8: Nodos estables impropios

figuras se corresponde con el sistema lo más sencillo es proceder como sigue. Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

b y c no pueden ser los dos nulos. Si $b > 0$, entonces $x' = ax + by > 0$ si $x = 0$ e $y > 0$ lo que nos dice que las trayectorias cruzan el semieje y positivo en el sentido de crecimiento de x por lo que en este caso el diagrama de fases tiene que ser de la forma representada en la figura de la derecha. Si $b < 0$, entonces $x' < 0$ si $x = 0$ y $y > 0$ y, por tanto, el diagrama de fases tiene que ser como el de la figura de la izquierda. Si $b = 0$ se razona de manera análoga con el coeficiente c. Si $c > 0$ el diagrama de fases se corresponde con la figura de la izquierda y si $c < 0$ con el de la derecha. En este caso se dice que el $\mathbf{0}$ es un **nodo estable impropio**.

Autovalor doble positivo con sólo un autovector linealmente independientes

El diagrama de fases es igual al del caso precedente con las direcciones invertidas (véase la figura 4.9). En este caso se dice que el $\mathbf{0}$ es un **nodo inestable impropio**.

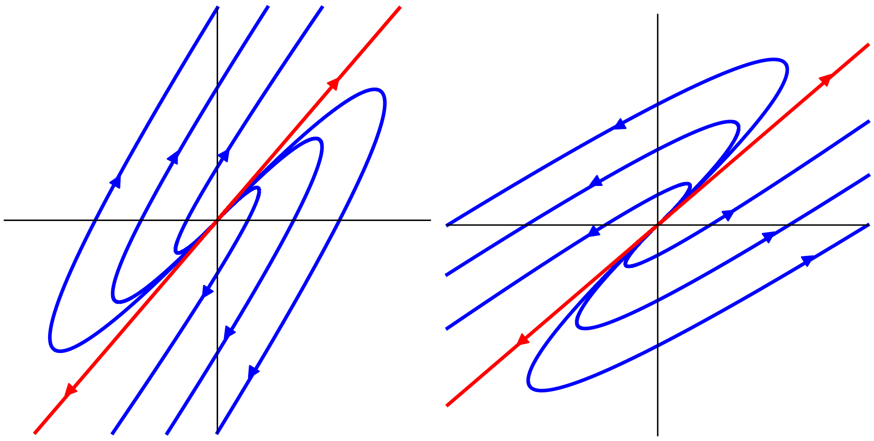


Figura 4.9: Nodos inestables impropios

4.6.3. Autovalores complejos

Si la matriz $\mathbf{A}$ tiene dos autovalores complejos estos han de ser conjugados.[13] Sean $\lambda = \alpha + \beta i$ el autovalor con parte imaginaria $\beta > 0$. Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$ es un autovector correspondientes a λ. La solución general de (4.61) es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\alpha t}\big(c_1\left(\mathbf{u}\cos\beta t - \mathbf{v}\operatorname{sen}\beta t\right) + c_2\left(\mathbf{v}\cos\beta t + \mathbf{u}\operatorname{sen}\beta t\right)\big) \tag{4.66}$$

En particular

$$x(t) = e^{\alpha t}\big((c_1u_1 + c_2v_1)\cos\beta t + (c_2u_1 - c_1v_1)\operatorname{sen}\beta t\big). \tag{4.67}$$

Si

$$R_1 = \sqrt{(c_1^2 + c_2^2)(u_1^2 + v_1^2)}$$

entonces existe $\delta_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$c_1u_1 + c_2v_1 = R_1\cos\delta_1, \qquad c_2u_1 - c_1v_1 = R_1\operatorname{sen}\delta_1.$$

Sustituyendo en (4.67) se tiene que

$$x(t) = e^{\alpha t}R_1(\cos\delta_1\cos\beta t + \operatorname{sen}\delta_1\operatorname{sen}\beta t) = e^{\alpha t}R_1\cos(\beta t - \delta_1). \tag{4.68}$$

Análogamente se comprueba que, si

$$R_2 = \sqrt{(c_1^2 + c_2^2)(u_2^2 + v_2^2)},$$

existe un δ_2 tal que

$$y(t) = e^{\alpha t}R_2\cos(\beta t - \delta_2). \tag{4.69}$$

[13] Recordemos que por ser la matriz real, los autovalores complejos aparecen por pares porque si $\alpha + \beta i$ es un autovalor de $\mathbf{A}$ también lo es $\alpha - \beta i$.

Autovalores imaginarios puros

Si $\alpha = 0$ las soluciones de (4.60) son de la forma

$$x(t) = R_1 \cos(\beta t - \delta_1)$$
$$y(t) = R_2 \cos(\beta t - \delta_2)$$

Estas funciones son periódicas de periodo $2\pi/\beta$. La función x toma todos los valores entre $-R_1$ y R_1 y la función y toma todos los valores entre $-R_2$ y R_2. En consecuencia, la trayectoria de cualquier solución no trivial de (4.61) rodea

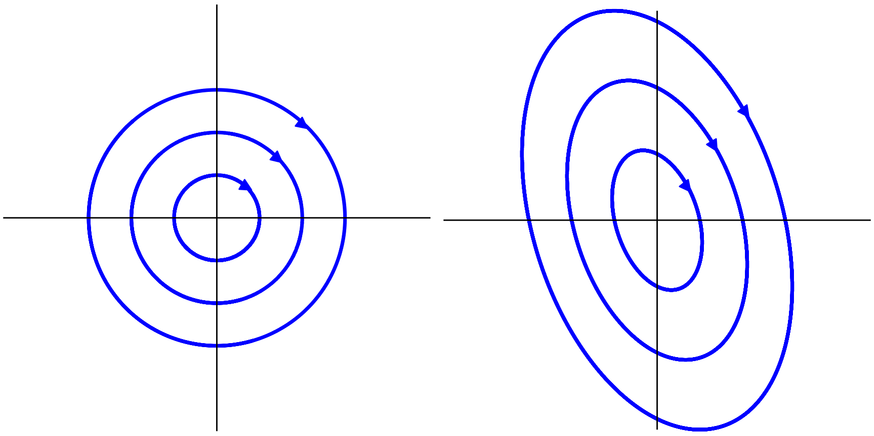


Figura 4.10: Centros

al origen. El sentido de giro hay que determinarlo en cada caso directamente a partir de la ecuación, por ejemplo analizando la dirección de la tangente en un punto de la curva solución. Por ejemplo si la curva solución cruza en el instante t_0 el semieje real positivo, el signo de $y'(t_0)$ nos indica el sentido de giro de la curva. Así si $y(t_0) > 0$ la trayectoria se mueve en el sentido contrario a las agujas del reloj y si $y(t_0)$ es negativo en el opuesto.

Cuando la matriz $\mathbf{A}$ tiene autovalores imaginarios puros el $\mathbf{0}$ se dice que es un **centro**.

En la figura 4.10 aparecen dos diagramas de fase correspondientes a este caso.

Autovalores con parte real negativa

En este caso el $\mathbf{0}$ es un atractor. Como $\alpha < 0$, el factor $e^{\alpha t}$ tiende a cero cuando t tiende a $+\infty$. Esto hace que según avanza t, la trayectoria de cada solución no trivial de (4.61) gire alrededor del origen pero cada vez a una distancia menor de él. Esto nos dice que las trayectorias son espirales que se aproximan cada vez más al origen. Como en el caso anterior, el sentido de giro se ha de determinar directamente a partir de la ecuación. En este caso la solución $(x, y) \equiv \mathbf{0}$ se dice que es un **foco o punto de espiral estable**. En la figura 4.11 aparecen representados dos focos estables.

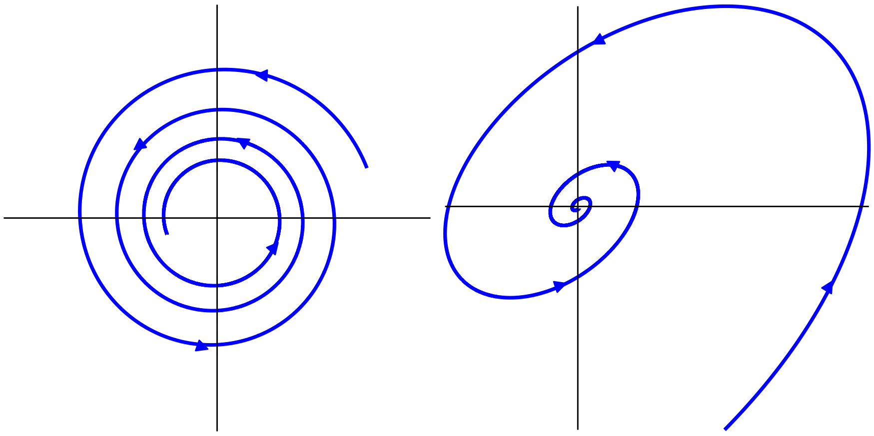


Figura 4.11: Focos estables

Autovalores con parte real positiva

En este caso el $\mathbf{0}$ es una fuente.El diagrama de es igual que el del caso anterior excepto en el sentido de recorrido de las trayectorias que ahora se alejan del origen. En este caso se dice que $\mathbf{0}$ es un **foco o punto de espiral inestable**. En la figura 4.12 aparecen representados dos focos inestables.

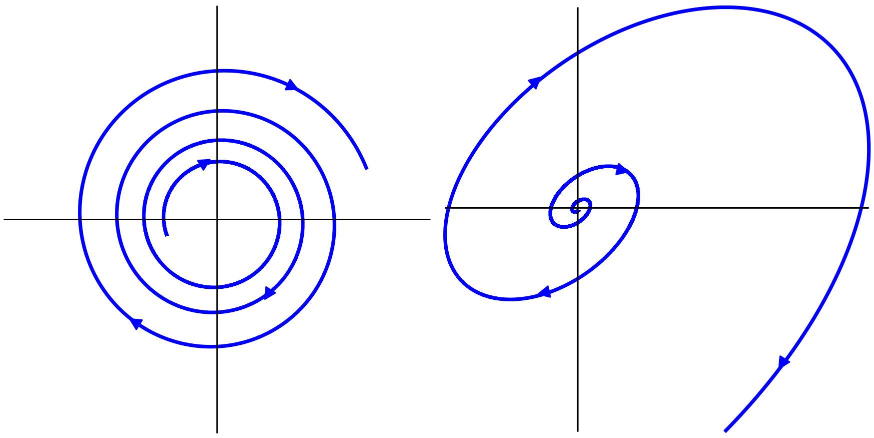


Figura 4.12: Focos inestables

4.6.4. El 0 es un autovalor

Si el 0 es un autovalor, hay todo un subespacio distinto de $\{\mathbf{0}\}$, el núcleo de $\mathbf{A}$, de puntos de equilibrio. Si la dimensión del núcleo es dos la matriz $\mathbf{A}$

es idénticamente nula y las soluciones de (4.61) son las funciones constantes. En este caso las trayectorias son puntos.

Si la dimensión del núcleo es uno el conjunto de puntos de equilibrio es una recta que pasa por el origen. En este caso, si 0 es el único autovalor de la matriz $\mathbf{A}$ esta ha de ser de uno de los tipos siguientes

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} a & -\frac{a}{b} \\ ab & -a \end{pmatrix} \tag{4.70}$$

con $a, b \neq 0$.

La solución general de (4.61) en el primer caso es

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 + c_2 a t \\ y(t) &= c_2 \end{aligned}$$

El conjunto de puntos de equilibrio es el eje x y las trayectorias de las soluciones no constantes son rectas paralelas al eje x pero distintas de este. El sentido en que se recorren las trayectorias depende del signo de a. Si $a > 0$, las del semiplano superior, $y > 0$, se recorren de izquierda a derecha y las del semiplano inferior de derecha a izquierda. Si $a < 0$ los sentidos se invierten. El diagrama de fases que aparece en la parte izquierda de la figura 4.13 corresponde a este tipo de sistemas.

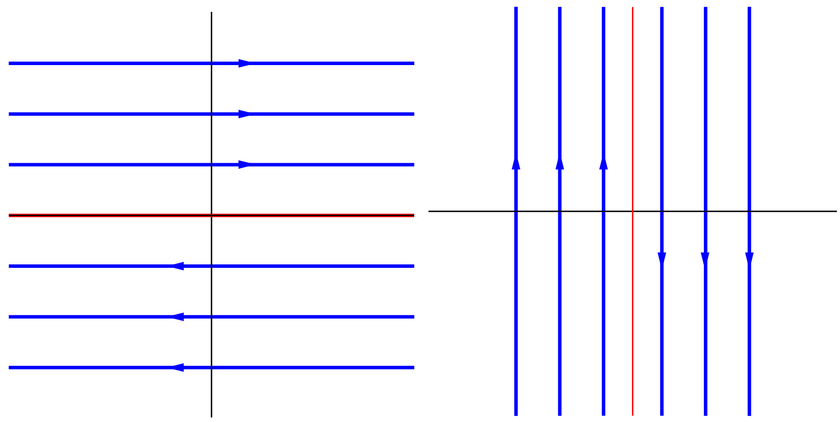


Figura 4.13: Diagramas de fases correspondientes a sistemas cuyas matrices son como las dos primeras de (4.70). En rojo aparece representada la recta de los puntos de equilibrio.

Análogamente, en el segundo caso, el conjunto de puntos de equilibrio es el eje y y las trayectorias de las soluciones no constantes son rectas paralelas al eje y pero distintas de este. El sentido en que se recorren las trayectorias, como antes, depende del signo de a. Si $a > 0$, en el semiplano izquierdo, $x < 0$, las trayectorias van de arriba a abajo y al revés en el semiplano derecho. Las trayectorias se invierten si $a < 0$. El diagrama de fases que aparece en la parte derecha de la figura 4.13 corresponde a este tipo de sistemas.

En el tercer caso la solución general es de la forma

$$\begin{aligned} x(t) =& c_1 + c_2(at+1) \\ y(t) =& b(c_1 + c_2 at) \end{aligned}$$

El conjunto de puntos de equilibrio es la recta $y = bx$ y las trayectorias de las soluciones no constantes son paralelas a dicha recta pero distintas de ella. Las trayectorias se invierten si $b < 0$. En la figura 4.14 aparece representado

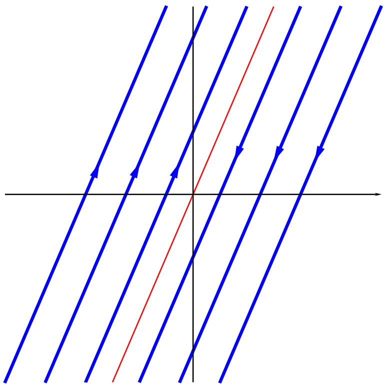


Figura 4.14: Diagramas de fases correspondientes a sistemas cuya matriz es del tercer tipo de las que aparecen (4.70). En rojo aparece representada la recta de los puntos de equilibrio.

un diagrama de fases de este tipo.

El sentido en que se recorren las trayectorias depende de los signos de a y de b. Si $b > 0$, en el semiplano izquierdo, $y - bx > 0$, las trayectorias van de arriba a abajo si $a > 0$ y de abajo a arriba si $a < 0$ y al revés en el semiplano $x - by < 0$.

Si 0 no es el único autovalor, sea $\lambda \neq 0$ el otro autovalor. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son autovectores correspondientes a $\mathbf{0}$ y λ respectivamente, la solución general es

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1\,\mathbf{u} + c_2\,\mathbf{v}e^{\lambda t}$$

El conjunto de puntos de equilibrio es la recta ℓ de dirección $\mathbf{u}$. Las trayectorias no triviales son semirrectas paralelas al vector $\mathbf{v}$. Si $\lambda < 0$, estas trayectorias se aproximan a ℓ cuando t tiende a $+\infty$. Si $\lambda < 0$ se alejan. En la figura 4.15 aparecen representados dos ejemplos de diagramas de fases de correspondientes a los dos situaciones citadas. En el primer caso todos los puntos de equilibrio son estables. En el segundo todos son inestables.

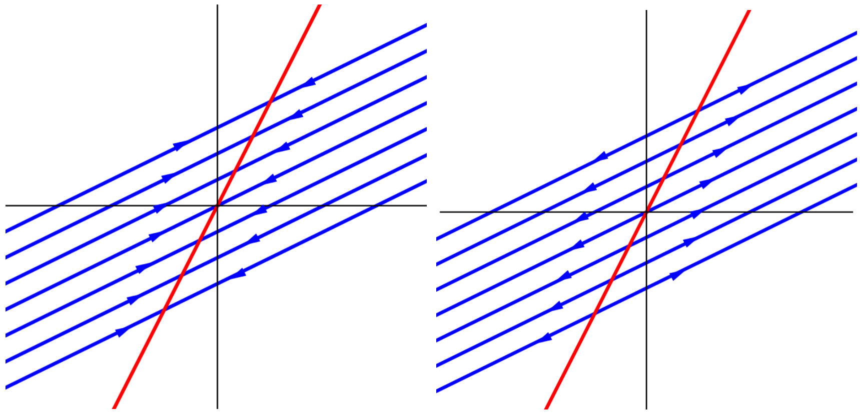


Figura 4.15: Diagramas de fases correspondientes a un autovalor igual a cero y otro distinto de cero. En rojo aparece representada la recta de los puntos de equilibrio.

4.6.5. Clasificación de los puntos de equilibrio mediante la traza y el determinante de la matriz del sistema

Se define la **traza** de una matriz cuadrada como la suma de los elementos de su diagonal. Así en el caso de una matriz 2×2,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{4.71}$$

su traza es $\mathrm{tr}\mathbf{A} = a + d$.

El polinomio característico de la matriz $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) =& (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \\ =& \lambda^2 - (\mathrm{tr}\mathbf{A})\lambda + \det \mathbf{A}, \end{aligned}$$

como vemos, viene expresado en términos de la traza y el determinante de $\mathbf{A}$. En consecuencia, los autovalores de la matriz, es decir las soluciones de la ecuación

$$\lambda^2 - (\mathrm{tr}\mathbf{A})\lambda + \det \mathbf{A} = 0 \tag{4.72}$$

dependen únicamente de la traza y el determinante de la matriz. Esto nos va a permitir clasificar los puntos críticos del sistema $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, sin necesidad de resolver su ecuación característica, estudiando la traza y el determinante de la matriz $\mathbf{A}$.

Las soluciones de la ecuación (4.72) son

$$\lambda = \frac{\mathrm{tr}\mathbf{A} \pm \sqrt{(\mathrm{tr}\mathbf{A})^2 - 4\det \mathbf{A}}}{2}$$

si $(\mathrm{tr}\mathbf{A})^2 - 4\det \mathbf{A} > 0$,

$$\lambda = \frac{\mathrm{tr}\mathbf{A}}{2}$$

si $(\mathrm{tr}\mathbf{A})^2 = 4\det\mathbf{A}$ y

$$\lambda = \frac{\mathrm{tr}\mathbf{A} \pm \sqrt{(4\det\mathbf{A} - \mathrm{tr}\mathbf{A})^2}\, i}{2}$$

si $(\mathrm{tr}\mathbf{A})^2 - 4\det\mathbf{A} < 0$. En el primer caso las dos raíces son reales y distintas, en el segundo sólo hay una raíz real, por lo tanto de multiplicidad 2, y en el último caso hay dos raíces complejas distintas conjugada la una de la otra.

Por otra parte, teniendo en cuenta que la suma de las soluciones de una ecuación de segundo grado como (4.72) es el opuesto del coeficiente de λ y su producto es el término independiente,[14] resulta que la suma de los autovalores de la matriz $\mathbf{A}$ es su traza y el producto su determinante. En particular, $\det\mathbf{A} \neq 0$ si, y sólo si, 0 no es un autovalor de $\mathbf{A}$.

Las observaciones anteriores nos permiten reformular el estudio hecho en las secciones anteriores en términos de la traza y el determinante de $\mathbf{A}$.

Caso 1: $\det\mathbf{A} < 0$.

En este caso el $\mathbf{0}$ es el único punto de equilibrio y $(\mathrm{tr}\mathbf{A})^2 - 4\det\mathbf{A} > 0$. Esto último nos dice, como hemos señalado más arriba, que los dos autovalores de la matriz $\mathbf{A}$ son reales y distintos. Además, como $\det\mathbf{A} < 0$, su producto es negativo y, por lo tanto, tienen signos opuestos. En consecuencia el $\mathbf{0}$ es un punto de silla.

Caso 2: $\det\mathbf{A} > 0$.

Caso 2.1: $(\mathrm{tr}\mathbf{A})^2 - 4\det\mathbf{A} > 0$.

Como hemos indicado más arriba, en este caso los dos autovalores de la matriz $\mathbf{A}$ son reales y distintos. Como su producto es positivo, ambos tienen el mismo signo, luego

- si $\mathrm{tr}\mathbf{A} > 0$ el $\mathbf{0}$ es un nodo inestable,
- si $\mathrm{tr}\mathbf{A} < 0$ el $\mathbf{0}$ es un nodo estable.

Caso 2.2: $(\mathrm{tr}\mathbf{A})^2 - 4\det\mathbf{A} = 0$.

Hay un sólo autovalor real, $\lambda = \mathrm{tr}\mathbf{A}/2$ de multiplicidad 2:

- Si $\mathrm{tr}\mathbf{A} < 0$ el $\mathbf{0}$ o es un punto de estrella estable o es un nodo estable impropio,
- si $\mathrm{tr}\mathbf{A} > 0$ el $\mathbf{0}$ o es un punto de estrella inestable o es un nodo inestable impropio.

[14] Si λ_1 y λ_2 son las dos soluciones de la ecuación $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ entonces

$$\lambda^2 + b\lambda + c = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

luego $\lambda_1 + \lambda_2 = -b$ y $\lambda_1\lambda_2 = c$.

Caso 2.3: $(\mathrm{tr}\mathbf{A})^2 - 4\det\mathbf{A} < 0$.

En este caso los autovalores son complejos conjugados. La parte real de ambos autovalores es $\mathrm{tr}\mathbf{A}/2$, luego:

- si $\mathrm{tr}\mathbf{A} = 0$ el $\mathbf{0}$ es un centro,
- si $\mathrm{tr}\mathbf{A} < 0$ el $\mathbf{0}$ es un punto de espiral estable,
- si $\mathrm{tr}\mathbf{A} > 0$ el $\mathbf{0}$ es un punto de espiral inestable.

Caso 3: $\det\mathbf{A} = 0$.

En este caso el 0 es un autovalor por lo que hay todo un espacio vectorial de dimensión positiva de puntos de equilibrio,

Si la matriz es idénticamente nula todos los puntos son de equilibrio y las trayectorias son puntos.

Si la matriz no es idénticamente nula el conjunto de puntos de equilibrio es una recta que pasa por el origen. Las trayectoria son o rectas si el cero es el único autovalor o semirrectas si hay un autovalor no nulo. En este último caso:

- Si $\mathrm{tr}\mathbf{A} > 0$ los puntos de equilibrio son inestables.
- Si $\mathrm{tr}\mathbf{A} < 0$ los puntos de equilibrio son estables.

4.7. Estudio cualitativo de los sistemas de ecuaciones lineales

En la sección 4.2 vimos, haciendo uso del método de los autovalores, que el sistema (4.59) tenía un conjunto fundamental de soluciones formado por funciones de uno de estos dos tipos:[15]

$$\begin{aligned}
\text{a)}\quad \mathbf{y}(x) =& e^{\lambda x}\big(\mathbf{v}_1 x^{j-1} + \mathbf{v}_2 x^{j-2}\cdots + \mathbf{v}_j\big)\\
\text{b)}\quad \mathbf{y}(x) =& e^{\alpha x}\cos\beta x\big(\mathbf{u}_1 x^{j-1} + \mathbf{u}_2 x^{j-2}\cdots + \mathbf{u}_j\big)+\\
&+e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x\big(\mathbf{v}_1 x^{j-1} + \mathbf{v}_2 x^{j-2}\cdots + \mathbf{v}_j\big)
\end{aligned}$$

según $\lambda = \alpha + \beta i$ fuese un autovalor real, en el primer caso, o complejo en el segundo, con $1 \leqslant j \leqslant d$, siendo d el menor entero positivo tal que $\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^d = \ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{d+1}$, que sabemos que es menor o igual que la multiplicidad de λ. Podemos resumir esto en el siguiente teorema.

Teorema 4.7.1. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$ *y sea* $\mathbf{y}$ *una solución de*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}. \tag{4.73}$$

[15] Realmente el primer caso se puede considerar como un caso particular del segundo haciendo $\beta = 0$. En este caso $\lambda = \alpha$ es real.

Entonces cada coordenada de $\mathbf{y}$ *es una combinación lineal de las* $2n$ *funciones*

$$x^j e^{\alpha x} \cos \beta x, \qquad x^k e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \tag{4.74}$$

donde α *y* β *varían en el conjunto de los números reales tales que* $\lambda = \alpha + \beta i$ *es un autovalor de* $\mathbf{A}$, $\beta \geqslant 0$, *y* j *y* k *son número enteros no negativos menores que el menor entero positivo* d *tal que* $\ker(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^d = \ker(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{d+1}$.[16]

Corolario 4.7.2. *Si* $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$, *entonces toda solución de*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}.$$

es una función de clase C^∞.[17]

Dado un vector $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ vamos a denotar

$$||\mathbf{v}|| = \max\{|v_1|, \ldots, |v_n|\}. \tag{4.75}$$

Teorema 4.7.3. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$. *Supongamos que todos los autovalores de* $\mathbf{A}$ *tienen parte real menor que un cierto número* a. *Entonces existe una constante* $M > 0$ *tal que para toda solución* $\mathbf{y}$ *de*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \tag{4.76}$$

se verifica que

$$||\mathbf{y}(x)|| \leqslant M e^{ax} ||\mathbf{y}(0)|| \tag{4.77}$$

para todo $x \geqslant 0$.

Demostración. En primer lugar obsérvese que las funciones que aparecen en (4.74) están acotadas por $(1 + x^n)e^{\alpha x}$ para todo $x \geqslant 0$.[18] Como $\alpha < a$

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + x^n) e^{(\alpha - a)x} = 0.^{19}$$

Esto implica que la función $(1 + x^n)e^{(\alpha - a)x}$ está acotada en $[0, +\infty)$. Por lo tanto existe una constante $k > 0$ tal que para toda función u de las que aparecen en (4.74) se verifica que

$$|u(x)| \leqslant (1 + x^n)e^{\alpha x} = (1 + x^n)e^{(\alpha - a)x} e^{ax} \leqslant k e^{ax}$$

[16] En particular j y k son menores o iguales que n.

[17] Una función se dice que es de clase C^∞ si tiene derivadas de cualquier orden.

[18] Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ están acotadas por $e^{\alpha x}$ y si $x \geqslant 1$ por $x^n e^{\alpha x}$.

[19] Esto es cierto porque si $s < 0$ y $m \geqslant 0$, aplicando la regla de L'Hôpital si es preciso, se verifica que

$$\lim_{x \to \infty} x^m e^{sx} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^m}{e^{-sx}} = \cdots = \lim_{x \to \infty} \frac{m!}{(-s)^m e^{-sx}} = 0.$$

para todo $x \geqslant 0$. Se deduce del teorema 4.7.1 que si $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ es una solución de (4.76), existe una constante $C > 0$, que depende de ψ, tal que,

$$|\psi_j(x)| \leqslant Ce^{ax} \quad \text{para todo } x \geqslant 0 \text{ y } j = 1, \ldots, n. \tag{4.78}$$

Supongamos que $e^{\mathbf{A}x} = (\varphi_{ij}(x))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Para cada una de las funciones vectoriales $\varphi_i = (\varphi_{i1}, \ldots, \varphi_{in})$ existe una constante para la que se verifica la relación (4.78). Si $C > 0$ es una constante mayor que todas esas constantes, se verifica que

$$|\varphi_{ij}(x)| \leqslant Ce^{ax}$$

para todo $x \geqslant 0$ y todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Si $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ es una solución de (4.76), por 4.3.12,

$$|y_i(x)| \leqslant |\varphi_{i1}(x)y_1(0)| + \cdots + |\varphi_{in}(x)y_n(0)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\varphi_{ij}(x)| \, ||y(0)||$$

luego

$$||\mathbf{y}(x)|| \leqslant \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |\varphi_{ij}(x)| \right) ||y(0)|| \leqslant nCe^{ax} ||\mathbf{y}(0)||.$$

□

Teorema 4.7.4. *Sea $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$. Supongamos que todos los autovalores de $\mathbf{A}$ tienen parte real mayor que un cierto número a. Entonces existe una constante $m > 0$ tal que para toda solución $\mathbf{y}$ de*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

se verifica que

$$||\mathbf{y}(x)|| \geqslant me^{ax} ||\mathbf{y}(0)|| \tag{4.79}$$

para todo $x \geqslant 0$.

Demostración. Si $\mathbf{y}$ es una solución del sistema entonces

$$\mathbf{y}(x) = e^{\mathbf{A}x}\mathbf{y}(0)$$

luego

$$\mathbf{y}(0) = e^{-\mathbf{A}x}\mathbf{y}(x).$$

Sea $e^{-\mathbf{A}x} = (\varphi_{ij}(x))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Aplicando el teorema 4.7.3 cambiando $\mathbf{A}$ por $-\mathbf{A}$, tenemos que existe $M > 0$ tal que,

$$\|\varphi_i(x)\| \leqslant Me^{-ax}$$

para todo $x \geqslant 0$ y todo $i = 1, \ldots, n$. En consecuencia, para todo $i = 1, \ldots, n$ se verifica que

$$\begin{aligned} |y_i(0)| &= |\varphi_{i1}(x)y_1(x)| + \cdots + |\varphi_{in}y_n(x)| \leqslant \\ &\leqslant (|\varphi_{i1}(x)| + \cdots + |\varphi_{in}|) \, \|\mathbf{y}(x)\| \leqslant nMe^{-ax} \, \|\mathbf{y}(x)\| \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$(nM)^{-1}e^{ax}||\mathbf{y}(0)|| \leqslant \|\mathbf{y}(x)\|$$

para todo $x \geqslant 0$. □

Una aplicación muy importante del teorema 4.7.1 es el siguiente resultado.

Teorema 4.7.5. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$. *Toda solución de*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \tag{4.80}$$

verifica que

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{y}(x) = 0 \tag{4.81}$$

si, y sólo si, todos los autovalores de $\mathbf{A}$ *tienen parte real negativa.*

Demostración. Supongamos que existe un autovalor $\lambda = \alpha + \beta i$ que tiene parte real $\alpha \geqslant 0$. Según hemos visto en 4.2, existe una solución de (4.80) de la forma

$$\mathbf{y}(x) = e^{\alpha x}\left(\mathbf{u}\cos\beta x + \mathbf{v}\operatorname{sen}\beta x\right)$$

donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}$ no nulo. Es obvio que esta función no verifica (4.81).

La otra implicación es una consecuencia inmediata del teorema 4.7.3. □

Definición 4.7.6. Se dice que $\mathbf{0}$ es un **atractor** del sistema lineal

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

si todas las soluciones del sistema verifican que

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{y}(x) = 0.$$

Con esta nomenclatura podríamos reformular el resultado anterior de la siguiente manera.

Teorema 4.7.7. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$. *El* $\mathbf{0}$ *es un atractor del sistema lineal*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

si, y sólo si, todos los autovalores de $\mathbf{A}$ *tienen parte real negativa.*

De manera análoga, haciendo uso del teorema 4.7.4 se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 4.7.8. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$. *Toda solución* $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ *de*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

verifica que

$$\lim_{x \to \infty} \|\mathbf{y}(x)\| = \infty \tag{4.82}$$

si, y sólo si, todos los autovalores de $\mathbf{A}$ *tienen parte real positiva.*

Definición 4.7.9. Se dice que $\mathbf{0}$ es una **fuente** del sistema lineal

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

si toda solución del sistema $\mathbf{y} \neq 0$ verifica que

$$\lim_{x \to \infty} ||\mathbf{y}(x)|| = \infty.$$

Teorema 4.7.10. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$. *El* $\mathbf{0}$ *es una fuente del sistema lineal*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

si, y sólo si, todos los autovalores de $\mathbf{A}$ *tienen parte real positiva.*

Definición 4.7.11. Una solución $\mathbf{y}$ de

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \tag{4.83}$$

se dice que es **estable** si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que para cualquier otra solución $\mathbf{y}_1$ de (4.83) que satisfaga la condición

$$\|\mathbf{y}(0) - \mathbf{y}_1(0)\| < \delta$$

se verifica que

$$\|\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}_1(x)\| < \varepsilon$$

para todo $x \geqslant 0$. Si la solución no es estable se dice que es **inestable**

El siguiente teorema demuestra que si el origen es un atractor del sistema entonces todas las soluciones son estables.

Teorema 4.7.12. *Sea* $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$.

a) *Si* $\mathbf{0}$ *es un atractor del sistema (4.83) entonces todas las soluciones de este son estables.*

b) *Si al menos un autovalor de la matriz* $\mathbf{A}$ *tiene parte real positiva entonces todas las soluciones de (4.83) son inestables.*

c) *Supongamos que* $\mathbf{A}$ *tiene, al menos, un autovalor imaginario puro y que sus restantes autovalores tienen parte real menor o igual que* 0*. Si cada autovalor imaginario puro tiene tantos autovectores linealmente independientes como su multiplicidad,*[20] *entonces todas las soluciones de (4.83) son estables. En caso contrario, todas las soluciones son inestables.*

Antes de demostrar el teorema vamos a ver un lema previo.

Lema 4.7.13. *Sea* $\mathbf{y}$ *una solución del sistema (4.83). Entonces* $\mathbf{y}$ *es estable si, y sólo si, la solución trivial* $\mathbf{y}_0(x) \equiv \mathbf{0}$ *es estable.*

Demostración. Si $\mathbf{y}$ es estable, dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ como en la definición 4.7.11. Sea $\mathbf{z}$ una solución de (4.83) que satisfaga $||\mathbf{z}(\mathbf{0})|| < \delta$. Como $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}+\mathbf{z}$ también es solución del sistema y $||\mathbf{y}_1(0) - \mathbf{y}(0)|| = ||\mathbf{z}(0)|| < \delta$, entonces

$$||\mathbf{z}(x)|| = ||\mathbf{y}_1(x) - \mathbf{y}(x)|| < \varepsilon$$

para todo $x \geqslant 0$. Esto demuestra que la solución trivial es estable.

Recíprocamente, si $\mathbf{y}_0 \equiv \mathbf{0}$ es estable, dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta > 0$ como en la definición 4.7.11. Sea $\mathbf{y}$ una solución de (4.83). Si $\mathbf{y}_1$ es otra solución que verifica $||\mathbf{y}_1(0) - \mathbf{y}(0)|| < \delta$, sea $\mathbf{z} = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}$. La función $\mathbf{z}$ es una solución de (4.83) y $||\mathbf{z}(0)|| < \delta$, luego

$$||\mathbf{y}_1(x) - \mathbf{y}(x)|| = ||\mathbf{z}(x)|| < \varepsilon$$

para todo $x \geqslant 0$. Esto demuestra que $\mathbf{y}$ es estable. □

Demostración de 4.7.12. a) Supongamos que el origen es un atractor de (4.83). Sea $a < 0$ tal que $\operatorname{Re}\lambda < a$ para todo λ autovalor de $\mathbf{A}$. Por 4.7.3 existe un $M > 0$ tal que para toda solución $\mathbf{y}$ de (4.83) se verifica que

$$||\mathbf{y}(x)|| \leqslant Me^{ax}||\mathbf{y}(0)||, \quad \text{para todo } x \geqslant 0.$$

Dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta < \frac{\varepsilon}{M}$. Si $\mathbf{y}$ es una solución de (4.83) tal que $||\mathbf{y}(0)|| < \delta$ entonces

$$||\mathbf{y}(x)|| \leqslant Me^{ax}\delta < \varepsilon$$

Esto demuestra que la solución trivial es estable. Para concluir la demostración del apartado a) basta con aplicar el lema 4.7.13.

b) Supongamos que $\lambda = \alpha + i\beta$ es un autovalor de $\mathbf{A}$ con $\alpha > 0$. Vimos en 4.2.1 que (4.83) tiene una solución de la forma

$$\mathbf{y}(x) = e^{\alpha x}\left(\mathbf{u}\cos\beta x + \mathbf{v}\operatorname{sen}\beta x\right)$$

[20] Es decir, si $\dim(\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}))$ coincide con la multiplicidad de λ para todos los autovalores de la forma $\lambda = \beta i$.

con $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores, $\mathbf{u}$ no nulo. Como esta función no está acotada en $[0, \infty)$ la solución trivial no puede ser estable. Por el lema 4.7.13 todas las soluciones de (4.83) son inestables.

c) Supongamos, en primer lugar, que para cada autovalor $\lambda = \beta i$ con parte real 0 se verifica que $\dim(\ker(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}))$ coincide con la multiplicidad del autovalor. Para estos autovalores las funciones que aparecen en (4.74) son de la forma $\cos \beta x$ o $\operatorname{sen} \beta x$ que están acotadas. Razonando como en el teorema 4.7.3 se demuestra que, existe una constante $M > 0$ tal que para toda solución $\mathbf{y}$ de (4.83) se verifica

$$\|\mathbf{y}(x)\| \leqslant M \|\mathbf{y}(0)\|$$

para todo $x \geqslant 0$. La misma demostración del apartado a) muestra que todas las soluciones son estables.

Si para algún autovalor $\lambda = \beta i$ ocurre que su multiplicidad es mayor que $\dim(\ker(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}))$, el sistema tiene una solución del tipo

$$\mathbf{y}(x) = \cos \beta x(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 x) + \operatorname{sen} \beta x(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 x)$$

con $\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0}$ o $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$. Esta solución no está acotada en $[0, \infty)$, por lo que la solución trivial no puede ser estable. El resultado se sigue del lema 4.7.13. $\square$

4.8. Ejercicios

4.8.1. Transforma las siguientes ecuaciones diferenciales o sistemas en un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales de primer orden:

a) $y'' + 3y' + 7y = x^2$

b) $y^{(4)} + 6y'' - 3y' + y = \cos 3x$

c) $\begin{cases} x'' - 5x + 4y = 0 \\ y'' + 4x - 5y = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x'' = 3x - y + 2z \\ y'' = x + y - 4z \\ z'' = 5x - y - z \end{cases}$

4.8.2. Expresa en forma matricial el sistema de ecuaciones diferenciales asociado a la ecuación

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

4.8.3. Resuelve los sistemas de ecuaciones diferenciales siguientes por el método de eliminación:

a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

c) $\begin{cases} x' = 4x + 2y + 2t \\ y' = -2x + y \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = 2x - 3y + 2 \operatorname{sen} 2t \\ y' = x - 2y - \cos 2t \end{cases}$

4.8.4. Demuestra que

$$\left\{\left(e^{2t},-e^{2t}\right),\left(te^{2t},(1-t)e^{2t}\right)\right\}$$

y

$$\left\{\left((t+1)e^{2t},-te^{2t}\right),\left(te^{2t},(1-t)e^{2t}\right)\right\}$$

son dos conjuntos fundamentales de soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

4.8.5. Dadas las funciones vectoriales $\mathbf{x} = (t, 1)$ e $\mathbf{y} = (t^2, 2t)$:

a) Calcula su wronskiano.

b) ¿En qué intervalos son linealmente independientes?

c) ¿Qué conclusión puede formularse acerca de los coeficientes del sistema homogéneo satisfecho por ellas?

d) Encuentra dicho sistema y verifica las conclusiones del apartado anterior.

4.8.6. Contesta a las mismas preguntas del ejercicio anterior para las funciones vectoriales $\mathbf{x} = (t^2, 2t)$ e $\mathbf{y} = (e^t, e^t)$.

4.8.7. Halla la solución general del sistema homogéneo $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ en los siguientes casos:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ f) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

g) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ h) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4.8.8. Resuelve el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

con la condición inicial $(x, y, z)(0) = (2, 3, 4)$.

4.8.9. Integra el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

4.8.10. Calcula $e^{\mathbf{A}x}$ en los siguientes casos:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4.8.11. Resuelve los sistemas no homogéneos siguientes:

a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t + \cos t \\ \operatorname{sen} t - \cos t \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4t + 1 \\ \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4.8.12. Integra los sistemas no homogéneos siguientes con las condiciones iniciales indicadas:

a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}$, $(x, y)(0) = (0, 0)$

b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{pmatrix}$, $(x, y)(0) = (0, 0)$

c) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \cos 2t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.8.13. Determina la solución general, clasifica los puntos de equilibrio y dibuja el diagrama de fases de los siguientes sistemas lineales planos:

$$\text{a)}\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y \end{cases}$$

$$\text{c)}\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases} \qquad \text{d)}\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 5y - 2x \end{cases}$$

4.8.14. Determina la solución general, clasifica los puntos de equilibrio y dibuja el diagrama de fases del sistema lineal plano $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ en los siguientes casos:

$$\text{a)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{d)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{e)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{f)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

4.8.15. Clasifica el origen como punto de equilibrio del sistema lineal plano

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & a \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

4.8.16. Representa el diagrama de fases del sistema $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ si los autovalores y autovectores de la matriz $\mathbf{A}$ son:

a) $\lambda = 1, \mathbf{u} = (1,1)$ y $\mu = 2, \mathbf{v} = (1,-1)$
b) $\lambda = 1, \mathbf{u} = (1,0)$ y $\mu = -2, \mathbf{v} = (1,1)$
c) $\lambda = 3, \mathbf{u} = (1,2)$ y $\mu = 1, \mathbf{v} = (1,-3)$
d) $\lambda = -3, \mathbf{u} = (1,3)$ y $\mu = -1, \mathbf{v} = (-3,2)$

4.8.17. Clasifica los sistemas lineales planos $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ sin calcular los autovalores de $\mathbf{A}$ cuando:

$$\text{a)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{d)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4.9. Ejercicios de controles y exámenes

4.9.1. Controles

4.9.1. a) Transforma la siguiente ecuación diferencial en un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$x^3 y''' - 2x^2 y'' + 3xy' + 5y = \ln x$$

b) Resuelve el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = -\,y \\ y' = 13x + 4y \end{cases} \qquad x(0) = 0, \quad y(0) = 3$$

empleando el método de eliminación.

4.9.2. Halla la solución general del sistema

$$\begin{cases} x' + 2y' = 4x + 5y \\ 2x' - y' = 3x \end{cases}$$

y resuelve el correspondiente problema de valores iniciales si $x(0) = 1$ e $y(0) = -1$.

4.9.3. Halla la solución general del sistema homogéneo:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

4.9.4. Halla la solución general del sistema

$$\begin{cases} 2y' - \ \ x' = x + 3y + e^t \\ 3x' - 4y' = x - 15y + e^{-t} \end{cases}$$

y resuelve el correspondiente problema de valores iniciales si $x(0) = 1$ e $y(0) = -1$.

4.9.5. Halla la solución general del sistema homogéneo:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

4.9.6. Resuelve el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z \\ y' &= 3x - 2y - 3z \\ z' &= 2z - x + y \end{aligned}$$

4.9.7. Se considera el sistema:

$$\begin{aligned} x' =& 2x - y - z \\ y' =& 2x - y - 2z \\ z' =& -x + y + 2z \end{aligned}$$

a) Halla la solución general del sistema.

b) Halla la solución que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ y $z(0) = -1$.

4.9.8. Se considera el sistema:

$$\begin{aligned} x' =& x + y + e^{-t} \\ y' =& 4x - 2y + e^{2t} \end{aligned}$$

a) Halla la solución general del sistema.

b) Halla la solución que satisface las condiciones iniciales $y(0) = -1$ y $x(0) = 1$.

4.9.9. Se considera el sistema:

$$\begin{aligned} x' =& 2x - y \\ y' =& -x + 2y - 5e^t \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

a) Halla la solución general del sistema.

b) Halla la solución que satisface las condiciones iniciales $y(0) = -1$ y $x(0) = 2$.

4.9.10. Determina la solución general, clasifica los puntos de equilibrio y dibuja el diagrama de fases de los siguientes sistemas lineales planos:

a) $\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} =& 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} =& 3x + 2y \end{aligned} \right.$ b) $\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} =& 3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} =& -2x + 3y \end{aligned} \right.$

4.9.11. Determina la solución general, clasifica los puntos de equilibrio y dibuja el diagrama de fases de los siguientes sistemas lineales planos:

a) $\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} =& -x + 4y \\ \frac{dy}{dt} =& -4x - y \end{aligned} \right.$ b) $\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} =& -5x - y \\ \frac{dy}{dt} =& 3x - y \end{aligned} \right.$

4.9.12. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales por el método de eliminación

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y + 2t^2 \\ y' = x - 2y \end{cases}$$

con la condición inicial $x(0) = -1$, $y(0) = 3$.

4.9.13. Halla la solución general por el método de los autovalores del sistema homogéneo $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$$

4.9.14. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales por el método de eliminación

$$\begin{cases} x' = x - 2y + 2e^t \\ y' = x + 3y + 3e^t \end{cases}$$

con la condición inicial $x(0) = -2$, $y(0) = 0$.

4.9.15. Halla la solución general por el método de los autovalores del sistema homogéneo $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4.9.16. Dado el siguiente sistema lineal homogéneo,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

a) determina la solución general,

b) clasifica los puntos de equilibrio,

c) esboza el diagrama de fases,

d) obtén la solución general del sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4t + 1 \\ \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix}.$$

4.9.17. Dado el siguiente sistema lineal homogéneo,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

a) determina la solución general,

b) clasifica los puntos de equilibrio,

c) esboza el diagrama de fases,

d) obtén la solución general del sistema

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1+t^2 \end{pmatrix}.$$

4.9.18. Se considera el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= 3x + 2y + 4e^{5t} \\ y' &= x + 2y \end{aligned}$$

Halla, por el método de eliminación, la solución que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $x(0) = -1$.

4.9.19. Se considera el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= x - 2y - z \\ y' &= y - x + z \\ z' &= x - z \end{aligned}$$

a) Expresa en forma matricial el sistema y encuentra las raíces de la ecuación característica del sistema.

b) Halla la solución general del sistema.

4.9.20. Resuelve el sistema

$$\begin{cases} x'' = 2x - 3y \\ y'' = x - 2y \end{cases}$$

4.9.21. Se considera el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= x + z - y \\ y' &= x + y - z \\ z' &= 2x - y \end{aligned}$$

a) Expresa en forma matricial el sistema y encuentra las raíces de la ecuación característica del sistema.

b) Halla la solución del sistema que satisface las condiciones iniciales $x(0) = -2$, $y(0) = 0$, $z(0) = 4$.

4.9.22. Se considera el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= x - y - z \\ y' &= x + y \\ z' &= 3x + z \end{aligned}$$

a) Expresa en forma matricial el sistema y encuentra las raíces de la ecuación característica del sistema.

b) Halla la solución general del sistema.

4.9.23. Se considera el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= 4x - y \\ y' &= 3x + y - z \\ z' &= x + z \end{aligned}$$

Halla la solución del sistema que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = -1$, $z(0) = 0$.

4.9.24. Se considera el sistema:

$$\begin{cases} x' = 2x + y + z + 1 \\ y' = 2y \\ z' = 3z + t \end{cases}$$

a) Halla la solución general del sistema.

b) Halla la solución que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ y $z(0) = 1$.

4.9.25. Determina la solución general, clasifica los puntos de equilibrio y dibuja el diagrama de fases de los siguientes sistemas lineales planos:

$$\text{a)} \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 2y \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 6y \end{cases}$$

4.9.2. Exámenes

4.9.26. Halla la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -4x + 4y \\ z' &= -2x + z \end{aligned}$$

4.9.27. Halla la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales $y' = \mathbf{A}y$ donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4.9.28. a) Transforma el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x' =& 2x - 3y \\ y' =& x - y \end{aligned}$$

en una ecuación de segundo orden. (**No** hay que resolver la ecuación).

b) Transforma el problema de valor inicial

$$y'' + 3y' + y = e^t, \qquad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$$

en un problema de valor inicial para un sistema de ecuaciones de primer orden. (**No** hay que resolver el sistema).

4.9.29. Se considera el sistema lineal $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de α el punto $(0,0)$ es un nodo estable?

b) Determina la solución general y clasifica los puntos de equilibrio en el caso $\alpha = -\frac{1}{2}$.

c) Clasifica los puntos de equilibrio y dibuja el diagrama de fases en el caso $\alpha = \frac{1}{2}$

4.9.30. Se considera el sistema:

$$\begin{aligned} x' =& 2x + y \\ y' =& x + 3y - z \\ z' =& -x + 2y + 3z \end{aligned}$$

a) Halla la solución general del sistema.

b) Halla la solución que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ y $z(0) = -1$.

4.9.31. Se considera el sistema lineal $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz 2×2 con autovectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ correspondientes a los autovalores $\lambda = -1$ y $\lambda = 2$, respectivamente. Encuentra una matriz fundamental del sistema, Φ, tal que $\Phi(0) = \mathbf{I}$.

4.9.32. Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Halla una matriz fundamental del sistema.

b) Clasifica los puntos de equilibrio del sistema e indica si sus soluciones son estables.

c) Halla la solución del problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = (-1, 0, 1).$$

4.9.33. Se considera la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + y = \frac{2e^x}{x} + x\cos x \qquad (x > 0)$$

a) Halla la solución general de la ecuación.

b) Transforma la ecuación anterior en un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

y calcula $e^{\mathbf{A}x}$.

4.9.34. Se considera el sistema

$$\begin{cases} x' = 2x + 4y - 2t - 4t^2 \\ y' = -x - 2y + 2t^2 \end{cases}$$

a) Halla la solución general del sistema.

b) Clasifica los puntos de equilibrio del sistema homogéneo asociado y dibuja su diagrama de fases.

4.9.35. Se considera el sistema lineal

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

a) Halla la solución general del sistema.

b) Clasifica sus puntos de equilibrio y dibuja su diagrama de fases.

c) Si $\mathbf{y}$ es la solución del sistema que satisface la condición inicial $\mathbf{y}(0) = (-3, \alpha)$ y además $\lim_{x\to\infty} |\mathbf{y}(x)| = 0$, ¿cuál es el valor de α?

4.9.36. Se considera el sistema $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ donde $\mathbf{A}$ es la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Halla la solución general del sistema.

b) Estudia la estabilidad de las soluciones del sistema.

c) Calcula $e^{\mathbf{A}x}$.

4.9.37. Se considera el sistema

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 5 & c \\ -c & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

a) Halla los valores de la constante c para los que el origen es un foco o punto de espiral del sistema.

b) Especifica, para cada uno de los valores de c hallados, si es un foco estable o inestable.

c) Dibuja los correspondientes diagramas de fases.

4.9.38. Se considera el sistema $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ donde $\mathbf{A}$ es la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Halla la solución general del sistema.

b) Estudia la estabilidad de las soluciones del sistema.

c) Resuelve el problema de valor inicial:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \begin{pmatrix} e^x \\ (x+1)e^x \\ xe^x \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4.9.39. Se considera el sistema $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ donde $\mathbf{A}$ es la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Halla la solución general del sistema.

b) Estudia la estabilidad de las soluciones del sistema.

c) Resuelve el problema de valor inicial:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \begin{pmatrix} e^x \\ (x+1)e^x \\ xe^x \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

CAPÍTULO 5

Transformada de Laplace

5.1. Transformada de Laplace

En este capítulo vamos a estudiar la transformada de Laplace real y cómo utilizarla en la resolución de ecuaciones diferenciales.

Definición 5.1.1. Sea $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que la función $t \mapsto f(t)e^{-\sigma t}$ es integrable (en sentido impropio)[1] para algún $\sigma \in \mathbb{R}$. La

[1] Una función $h : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable (Riemann) en cada intervalo $[0, A]$, con $A > 0$, se dice que es integrable (en sentido impropio) si el límite

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A h(x)\, dx \tag{5.1}$$

existe. En este caso se denota

$$\int_0^{+\infty} h(x)\, dx = \lim_{A\to\infty} \int_0^A h(x)\, dx.$$

La definición anterior se puede extender al caso en que h no está acotada en un entorno de 0, pero es integrable en cada intervalo $[a, A]$ con $0 < a < A$. En este caso se dice que h es integrable (en sentido impropio) si el límite

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ A\to\infty}} \int_a^A h(x)\, dx \tag{5.2}$$

existe. También en este caso se denota por $\int_0^\infty h$ al límite anterior, si existe.

Si el límite (5.1), o en su caso (5.2), existe cuando se remplaza h por $|h|$, se dice que la función h es absolutamente integrable (en sentido impropio) o que la integral de h es absolutamente convergente. Se comprueba que toda función absolutamente integrable es integrable y que

$$\left|\int_0^{+\infty} h(x)\, dx\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |h(x)|\, dx.$$

función

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

definida en el conjunto

$$D_{\mathcal{L}[f]} = \{s \in \mathbb{R} : \ t \mapsto f(t)e^{-st} \text{ es integrable}\}$$

se denomina **transformada de Laplace** de f.

El nombre de esta transformada proviene de que la integral que la define aparece en la *Théorie analytique des probabilités* que Laplace publicó en 1812.

Ejemplo 5.1.2. Si $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ y $f \equiv a$ en $[0, +\infty)$, la función $t \mapsto ae^{-st}$ es integrable si, y solo si, $s > 0$ y

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} ae^{-st}dt = \frac{a}{s}.$$

En este caso, $D_{\mathcal{L}[f]} = (0, +\infty)$.

Ejemplo 5.1.3. Sean $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ y $f(t) = e^{at}$, para $t \in [0, +\infty)$. La función $t \mapsto f(t)e^{-st}$ es integrable si, y solo si, $s > a$ y

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}dt = \frac{1}{s-a}.$$

En este caso, $D_{\mathcal{L}[f]} = (a, +\infty)$.

Lamentablemente, no toda función, incluso de clase C^∞, tiene transformada de Laplace.

Ejemplo 5.1.4. La función $f(t) = e^{t^2}$, $t \in [0, +\infty)$, no tiene transformada de Laplace, porque para todo $\sigma \in \mathbb{R}$ la función $t \mapsto f(t)e^{-\sigma t}$ no es integrable ya que $f(t)e^{-\sigma t} \to +\infty$ cuando $t \to +\infty$.

El hecho de que la transformada de Laplace de una función arbitraria pueda no estar definida o lo esté en un conjunto muy pequeño la hace poco útil si no se restringe la clase de funciones a las que se aplica. Por este motivo vamos a limitarnos a considerar sólo aquellas funciones para las que la integral que aparece en la definición de la transformada es absolutamente convergente. Para simplificar la escritura, en el resto de este capítulo vamos a denotar por e_a, para $a \in \mathbb{R}$, a la función $t \in [0, +\infty) \mapsto e^{at}$.

Definición 5.1.5. Denotaremos por $\mathcal{L}$ al conjunto de todas las funciones $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $fe_{-\sigma}$ es absolutamente integrable para algún $\sigma \in \mathbb{R}$.

Obsérvese que si $fe_{-\sigma}$ es absolutamente integrable, entonces, para todo $\tau \geqslant \sigma$, se verifica

$$\left|f(t)e^{-\tau t}\right| = \left|f(t)e^{-\sigma t}\right| e^{(\sigma-\tau)t} \leqslant \left|f(t)e^{-\sigma t}\right|, \qquad (t \geqslant 0),$$

lo que implica que $t \mapsto f(t)e^{-\tau t}$ es absolutamente integrable, y por lo tanto integrable, en $[0, +\infty)$. Esto demuestra que si $f \in \mathcal{L}$ entonces el dominio de su transformada $D_{\mathcal{L}[f]}$ es no vacío y contiene una semirrecta cerrada $[\sigma, +\infty)$. para algún $\sigma \in \mathbb{R}$.

El siguiente resultado nos da una clase bastante amplia de funciones que pertenecen $\mathcal{L}$.

Proposición 5.1.6. *Sea $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que verifica:*

a) *Es integrable (Riemann) en $[0, A]$ para todo $A > 0$.*

b) *Existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{t\to+\infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0$.*

Entonces $f \in \mathcal{L}$ y $D_{\mathcal{L}[f]} \supset (\sigma, +\infty)$.

Demostración. Por b), existe $R > 0$ tal que

$$\left|f(t)e^{-\sigma t}\right| \leqslant 1, \qquad \text{para todo } t \geqslant R.$$

En consecuencia, para todo $s \in \mathbb{R}$ con $s > \sigma$, se verifica que

$$\int_R^{+\infty} \left|f(t)e^{-st}\right| dt = \int_R^{+\infty} \left|f(t)e^{-\sigma t}\right| e^{(\sigma-s)t}\, dt \leqslant \int_R^{+\infty} e^{(\sigma-s)t}\, dt < +\infty. \tag{5.3}$$

Además, si $M = \sup\{e^{-st} : \ 0 \leqslant t \leqslant R\}$, se tiene

$$\int_0^R \left|f(t)e^{-st}\right|\, dt \leqslant M \int_0^R |f| < +\infty, \tag{5.4}$$

por a). De (5.3) y (5.4) se deduce que $s \in D_{\mathcal{L}[f]}$ para todo $s \in \mathbb{R}$ con $s > \sigma$. □

Definición 5.1.7. Denotaremos por $\mathcal{E}_\sigma$ al conjunto de todas las funciones $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifican las condiciones a) y b) de la proposición 5.1.6. Denotaremos por $\mathcal{E}$ a la unión de todos los $\mathcal{E}_\sigma$ cuando $\sigma \in \mathbb{R}$.

Las funciones de los ejemplos (5.1.2) a (5.1.3) pertenecen a $\mathcal{E}_0$ y $\mathcal{E}_a$ respectivamente. Otros ejemplos de funciones que pertenecen a la clase $\mathcal{E}$ son las funciones polinómicas o las funciones continuas, salvo quizá en un conjunto finito de puntos, y acotadas. En ambos casos las funciones pertenecen a $\mathcal{E}_0$.

Ejemplo 5.1.8. La función seno es continua y acotada, por lo que pertenece a $\mathcal{E}$. Integrando por partes se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^A e^{-st}\operatorname{sen} t\,dt =& 1 - e^{-sA}\cos A - s\int_0^A e^{-st}\cos t\,dt\\ =& 1 - e^{-sA}\cos A - s\Big[e^{-sA}\operatorname{sen} A + s\int_0^A e^{-st}\operatorname{sen} t\,dt\Big]\end{aligned}$$

luego

$$\int_0^A e^{-st}\operatorname{sen} t\,dt = \frac{1}{1+s^2}\big[1 - e^{-sA}\cos A - se^{-sA}\operatorname{sen} A\big] \xrightarrow{A\to\infty} \frac{1}{1+s^2}$$

En consecuencia

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen} t](s) = \frac{1}{1+s^2} \qquad s > 0. \tag{5.5}$$

La siguiente proposición resume alguna de las principales propiedades de la transformada de Laplace.

Proposición 5.1.9. *Sean $f,\ g \in \mathcal{L}$ y $a \in \mathbb{R}$. Entonces*

a) $f + g \in \mathcal{L}$ *y*

$$\mathcal{L}[f+g](s) = \mathcal{L}[f](s) + \mathcal{L}[g](s),$$

para todo $s \in D_{\mathcal{L}[f]} \cap D_{\mathcal{L}[g]}$.

b) $af \in \mathcal{L}$ *y*

$$\mathcal{L}[af](s) = a\mathcal{L}[f](s),$$

para todo $s \in D_{\mathcal{L}[f]}$.

c) $fe_a \in \mathcal{L}$ *y*

$$\mathcal{L}[fe_a](s) = \mathcal{L}[f](s-a),$$

para todo $s \in a + D_{\mathcal{L}[f]}$.

d) *Si, para $\tau > 0$, denotamos por f_τ la función*

$$t \mapsto \begin{cases} f(t-\tau), & \text{si } t \geqslant \tau \\ 0, & \text{si } 0 \leqslant t < \tau \end{cases}$$

entonces $f_\tau \in \mathcal{L}$ *y*

$$\mathcal{L}[f_\tau](s) = e^{-\tau s}\mathcal{L}[f](s),$$

para toda $s \in D_{\mathcal{L}[f]}$.

e) *Si, para* $\tau > 0$, *denotamos por* f^τ *la función* $t \longmapsto f(\tau t)$, *entonces* $f^\tau \in \mathcal{L}$ *y*

$$\mathcal{L}[f^\tau](s) = \frac{1}{\tau}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{\tau}\right),$$

para toda $s \in \tau D_{\mathcal{L}[f]}$.

La demostración de la proposición es inmediata. Los apartados a) y b) nos dicen que $\mathcal{L}$ es un espacio vectorial.

Ejemplo 5.1.10. Para cada $a \geqslant 0$ se define la **función de Heaviside** $\mathbf{H}_a$ como la función que vale

$$\mathbf{H}_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < a \\ 1, & \text{si } t \geqslant a \end{cases} \tag{5.6}$$

La función $\mathbf{H}_0$ se suele denotar simplemente $\mathbf{H}$.

Obsérvese que $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ es la función del ejemplo 5.1.2 cuando la constante es 1 y que $\mathbf{H}_a$ es precisamente la aplicación definida en el apartado d) de la proposición 5.1.9 cuando $f = \mathbf{H}$ y $\tau = a$. En consecuencia

$$\mathcal{L}[\mathbf{H}_a](s) = e^{-as}\mathcal{L}[\mathbf{H}](s) = \frac{e^{-as}}{s}, \qquad s > 0.$$

Ejemplo 5.1.11. Si $a > 0$, la función

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t < a \\ 0, & \text{si } t \geqslant a \end{cases}$$

se puede poner como una diferencia de funciones de Heaviside $f = \mathbf{H} - \mathbf{H}_a$ luego

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sa}}{s} = \frac{1 - e^{-as}}{s}, \qquad s > 0.$$

Ejemplo 5.1.12. Hemos visto en el ejemplo 5.1.8 que la transformada de la función seno es

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen} t](s) = \frac{1}{1+s^2} \qquad s > 0.$$

Aplicando 5.1.9e) se deduce que, para $a > 0$,

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen} at](s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}[\operatorname{sen} t]\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{a}{a^2+s^2} \qquad s > 0. \tag{5.7}$$

La igualdad entre los extremos de la relación anterior es trivialmente cierta si $a = 0$. Además, teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} at = -\operatorname{sen}(-a)t$, se deduce de 5.1.9b) que (5.7) también es válida si $a < 0$.

Ejemplo 5.1.13. Se deduce de 5.1.9 c) y del ejemplo anterior que

$$\mathcal{L}[e^{at}\operatorname{sen} bt](s) = \mathcal{L}[\operatorname{sen} bt](s-a) = \frac{b}{b^2+(s-a)^2} \qquad s > a. \tag{5.8}$$

5.2. Transformada de derivadas e integrales indefinidas

Ya que nosotros estamos interesados en la transformada de Laplace en relación con la resolución de ecuaciones diferenciales es conveniente tener resultados que relacionen la transformada de Laplace de una función y la de sus derivadas o primitivas.

Teorema 5.2.1. *Sea $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, derivable en $[0, +\infty)$. Si $f' \in \mathcal{L}$ entonces $f \in \mathcal{L}$.*

Además

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0), \tag{5.9}$$

para todo $s \in D_{\mathcal{L}[f']} \cap D_{\mathcal{L}[f]}$.

Demostración. Consideremos en primer lugar que $f(0) = 0$. Sea $s > 0$ tal que $f'e_{-s}$ es absolutamente integrable. Por el segundo teorema fundamental del cálculo

$$|f(t)| = \left|\int_0^t f'(u)\,du\right| \leqslant \int_0^t |f'(u)|\,du$$

luego

$$\int_0^\infty |f(t)|e^{-st}dt \leqslant \int_0^\infty \int_0^t |f'(u)|\,du\, e^{-st}dt = \int_0^\infty |f'(u)| \int_u^\infty e^{-st}dt\,du =$$
$$= \frac{1}{s}\int_0^\infty |f'(u)|e^{-su}du < +\infty. \tag{5.10}$$

Esto demuestra que $f \in \mathcal{L}$. Si $f(0) \neq 0$, por lo visto antes, $f - f(0)\mathbf{H} \in \mathcal{L}$, luego $f \in \mathcal{L}$ por 5.1.9 y porque $f(0)\mathbf{H} \in \mathcal{L}$.

El argumento de más arriba además muestra que la función $(fe_{-s})'$ es absolutamente integrable por ser suma de dos funciones absolutamente integrables. En particular[2]

$$\lim_{x\to\infty} f(x)e^{-sx} = 0.$$

Integrando por partes se tiene, para $s \in D_{\mathcal{L}[f']} \cap D_{\mathcal{L}[f]}$,

$$\int_0^A f'(t)e^{-st}dt = f(A)e^{-sA} - f(0) + s\int_0^A f(f)e^{-st}dt \xrightarrow{A\to\infty} -f(0) + s\mathcal{L}[f](s).$$

□

[2]En general una función integrable en $[0, \infty)$ no tiene por qué tener límite en infinito, pero si lo tiene se comprueba fácilmente que necesariamente ha de valer 0. Este es el caso, si la función es derivable y tanto ella como su derivada son integrables en $[0, +\infty)$. En efecto, por el segundo teorema fundamental del cálculo,

$$h(x) = h(0) + \int_0^x h'(t)\,dt \xrightarrow{x\to\infty} h(0) + \int_0^\infty h'(f)\,dt$$

Observación 5.2.2. Obsérvese que en la demostración anterior se prueba que si $f'e_{-a}$ es absolutamente integrable para un $a > 0$ entonces f pertenece a $\mathcal{E}_a$. En particular, en este caso la relación (5.9) es válida para todo $s > a$. Recíprocamente, en la demostración anterior también se prueba que si $f' \in \mathcal{E}_a$ para un a cualquiera, entonces $f \in \mathcal{L}$ y la relación (5.9) es válida para todo $s \in (a, +\infty)$.

Observación 5.2.3. La relación (5.10) garantiza que el teorema de Fubini es válido para la función $(u, t) \mapsto f'(u)e^{-st}$. Esto nos permite garantizar que la primera igualdad en (5.10) sigue siendo válida si quitamos los valores absolutos. Como además, en este caso, la desigualdad es realmente una igualdad, tendríamos una demostración alternativa de (5.9). La ventaja de esta demostración es que sigue siendo válida en situaciones más generales como, por ejemplo, en el caso del teorema 5.2.7, o si se cambia f' por una función de $\mathcal{L}$ que coincida con la función f' en cada intervalo $[0, A]$ excepto, quizá, en un conjunto finito de puntos.

Por inducción se demuestra el siguiente corolario.

Corolario 5.2.4. *Sea $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que f es derivable hasta el orden m. Si $f^{(m)} \in \mathcal{L}$ entonces $f^{(j)} \in \mathcal{L}$, para $j = 0, 1, \ldots, m - 1$.*

Además

$$\mathcal{L}[f^{(m)}](s) = \\ = s^m\mathcal{L}[f](s) - s^{m-1}f(0) - s^{m-2}f'(0) - \cdots - f^{(m-1)}(0) \quad (5.11)$$

si $s \in D_{\mathcal{L}[f^{(j)}]}$ para $j = 0, \ldots, m$.

Ejemplo 5.2.5. Del ejemplo 5.1.12 y el teorema 5.2.1 se deduce que, para $a \neq 0$,

$$\mathcal{L}[\cos at](s) = \frac{s}{a}\mathcal{L}[\operatorname{sen} at](s) = \frac{s}{a^2 + s^2} \qquad s > 0. \qquad (5.12)$$

La igualdad de los extremos de la relación anterior también es cierta cuando $a = 0$ por 5.1.2.

Ejemplo 5.2.6. Si $f(t) = t^k$, $t \in [0, +\infty)$, donde k es un entero positivo, como $f^{(k)} \equiv k!$, aplicando el corolario previo y el ejemplo 5.1.2 resulta que

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{k!}{s^{k+1}}$$

para todo $s > 0$.

Teorema 5.2.7. *Sea $f \in \mathcal{L}$ y sea*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad (x \geqslant 0)$$

Entonces $F \in \mathcal{L}$ y

$$\mathcal{L}[F](s) = \frac{\mathcal{L}[f](s)}{s} \tag{5.13}$$

para todo $s > 0$ tal que $s \in D_{\mathcal{L}[f]}$.

Demostración. Basta repetir la primera parte de la demostración de 5.2.1, cambiando f' por f y f por F, para demostrar $F \in \mathcal{L}$. Para concluir la demostración basta razonar como en la demostración alternativa de la segunda parte de dicho teorema sugerida en la observación 5.2.3. $\square$

5.3. Derivabilidad de la transformada de Laplace

En esta sección, dada una función f, vamos a denotar τf a la función

$$t \longmapsto (\tau f)(t) = t f(t), \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Para $n = 2, 3, \ldots$ denotaremos $\tau^n f = \tau(\tau^{n-1} f)$, donde $\tau^1 f = \tau f$.

Lema 5.3.1. *Si $f \in \mathcal{L}$ entonces, para $n = 1, 2, \ldots,$ $\tau^n f \in \mathcal{L}$.*

Además si $fe_{-\sigma}$ es absolutamente integrable entonces $\tau^n fe_{-s}$ es absolutamente integrable para todo $s > \sigma$. En particular $(\sigma, +\infty) \subset D_{\mathcal{L}[\tau^n f]}$.

Demostración. Sea σ tal que $fe_{-\sigma}$ es absolutamente integrable. Sea $s > \sigma$. Como

$$\lim_{t \to +\infty} t^n e^{-(s-\sigma)t} = 0,$$

existe $M > 0$ tal que

$$\left| t^n e^{-(s-\sigma)t} \right| \leqslant M,$$

para todo $t > 0$. Se tiene entonces que

$$\left| (\tau^n f)(t) e^{-st} \right| = \left| t^n e^{-(s-\sigma)t} f(t) e^{-\sigma t} \right| \leqslant M \left| f(t) e^{-\sigma t} \right|,$$

para todo $t \geqslant 0$. Lo que demuestra que $\tau^n fe_{-s}$ es absolutamente integrable y, por tanto que $\tau^n f \in \mathscr{L}$, y que $s \in D_{\mathcal{L}[\tau^n f]}$ para todo $s > \sigma$. $\square$

Teorema 5.3.2. *Si $fe_{-\sigma}$ es absolutamente integrable entonces su transformada de Laplace $\mathcal{L}[f]$ es derivable en el intervalo $(\sigma, +\infty)$ y*

$$\mathcal{L}[f]'(s) = -\mathcal{L}[\tau f](s), \qquad s > \sigma.$$

Demostración. Sea $s > \sigma$ y sea σ' tal que $s > \sigma' > \sigma$. Si, denotamos $F = \mathcal{L}[f]$, para cada $h \neq 0$ tal que $s - |h| > \sigma'$, se verifica que

$$\left|\frac{F(s+h)-F(s)}{h} + \mathcal{L}[\tau f](s)\right| \leqslant \int_0^\infty |f(t)|e^{-st}\left|\frac{e^{-ht}-1+th}{h}\right| dt$$

Por la fórmula de Taylor

$$|e^x - 1 - x| \leqslant \frac{x^2}{2}\, e^{|x|}$$

luego

$$\left|\frac{F(s+h)-F(s)}{h} + \mathcal{L}[\tau f](s)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^\infty t^2|f(t)|e^{-t(s-|h|)}dt \leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^\infty t^2|f(t)|e^{-\sigma' t}dt \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

□

Por inducción se demuestra el siguiente corolario.

Corolario 5.3.3. *Si $fe_{-\sigma}$ es absolutamente integrable entonces, para todo entero $n \geqslant 1$,*

$$\mathcal{L}[f]^{(n)}(s) = (-1)^n \mathcal{L}[\tau^n f](s) \qquad (s > \sigma),$$

5.4. Convolución

Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define la **convolución** de f con g en el punto x como

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, dy \tag{5.14}$$

si esta integral existe.

En nuestro caso, como las funciones que estamos considerando están definidas únicamente en $[0, +\infty)$, será conveniente para estudiar la convolución, considerar que están definidas en todo $\mathbb{R}$ y que valen 0 en $(-\infty, 0)$. Con este convenio, si $f, g \in \mathcal{L}$, entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $f(x-y)g(y) = 0$ si $y < 0$ o $y > x$. Por lo tanto, en este caso, la integral que aparece en (5.14) está definida para todo x. Podemos así particularizar la definición general para el caso de funciones de $\mathcal{L}$ de la siguiente manera.

Definición 5.4.1. Dadas dos funciones $f, g \in \mathcal{L}$ se define la **convolución** $f * g$ como la función

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)\, dy. \tag{5.15}$$

Se comprueba fácilmente que la convolución es una operación conmutativa, asociativa y distributiva con respecto a la suma.

Proposición 5.4.2. *Si* $f, g, h \in \mathcal{L}$, *entonces:*

a) $f * g = g * f$

b) $f * (g * h) = (f * g) * h$

c) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$.

Nuestro interés en la convolución proviene del siguiente resultado.

Teorema 5.4.3. *Si* f *y* $g \in \mathcal{L}$ *entonces* $f * g \in \mathcal{L}$ *y*

$$\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s) \tag{5.16}$$

para todo $s \in D_{\mathcal{L}[|f|]} \cap D_{\mathcal{L}[|g|]}$.

Demostración. Si $s \in D_{\mathcal{L}[|f|]} \cap D_{\mathcal{L}[|g|]}$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |(f * g)(t)|\, e^{-st} dt = \int_0^\infty \left| \int_0^t f(t-u)g(u)\, du \right| e^{-st}\, dt \leqslant \\
\leqslant \int_0^\infty \int_0^t |f(t-u)g(u)|\, du\, e^{-st}\, dt = \\
= \int_0^\infty \int_u^\infty \left| f(t-u)e^{-s(t-u)} \right| dt\, \left| g(u)e^{-su} \right| du = \\
= \int_0^\infty \int_0^\infty \left| f(v)e^{-sv} \right| dv\, \left| g(u)e^{-su} \right| du = \\
= \int_0^\infty \left| f(v)e^{-sv} \right| dv \int_0^\infty \left| g(u)e^{-su} \right| du < \infty.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que $f * g \in \mathscr{L}$. Además también demuestra que el teorema de Fubini es válido por lo que podemos repetir las cuentas anteriores sin valor absoluto

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f * g](s) &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(t-u)g(u)\, du \right) e^{-st}\, dt = \\
&= \int_0^\infty \left(\int_u^\infty f(t-u)e^{-s(t-u)}\, dt \right) g(u)e^{-su}\, du = \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(v)e^{-sv}\, dv \right) g(u)e^{-su}\, du = \\
&= \mathcal{L}[f](s) \cdot \mathcal{L}[g](s).
\end{aligned}$$

□

5.5. Aplicaciones de la transformada de Laplace

Vamos a comenzar viendo con un ejemplo cómo se emplea la transformada en la resolución de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 5.5.1. Consideremos el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} ty'' + 2y' + ty = 0 & t > 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases} \tag{5.17}$$

Calculando la transformada de Laplace de ambos miembros de la igualdad se tiene que

$$\begin{aligned} 0 =& \mathcal{L}[\tau y''](s) + 2\mathcal{L}[y'](s) + \mathcal{L}[\tau y](s) \\ =& -\mathcal{L}[y'']'(s) + 2\mathcal{L}[y'](s) - \mathcal{L}[y]'(s) \\ =& -\Big(s^2\mathcal{L}[y](s) - sy(0)\Big)' + 2\Big(s\mathcal{L}[y](s) - y(0)\Big) - \mathcal{L}[y]'(s) \\ =& -\Big(2s\mathcal{L}[y](s) + s^2\mathcal{L}[y]'(s) - 1\Big) + 2s\mathcal{L}[y](s) - 2 - \mathcal{L}[y]'(s) \\ =& -\left(1 + s^2\right)\mathcal{L}[y]'(s) - 1 \end{aligned}$$

luego

$$-\mathcal{L}[\tau y](s) = \mathcal{L}[y]'(s) = -\frac{1}{1+s^2} = -\mathcal{L}[\operatorname{sen} t](s)$$

y, en consecuencia

$$ty(t) = \operatorname{sen} t$$

es decir

$$y(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}.$$

Como vemos en el ejemplo precedente, hemos encontrado una solución del problema (5.17) en tres pasos:

- Primero hemos calculado la transformada de ambos miembros de la ecuación. Mediante este procedimiento hemos pasado de una ecuación diferencial a una ecuación algebraica más fácil de resolver.
- En segundo lugar hemos resuelto la ecuación algebraica.
- Finalmente, hemos reconocido su solución como la transformada de Laplace de una cierta función y hemos concluido que esta función es precisamente la solución del problema de valores iniciales de partida.

Vamos a analizar con más detenimiento el último punto. En el ejemplo no ha sido muy difícil reconocer que la solución de la ecuación algebraica era la transformada de la función seno. En general las cosas no son tan sencillas y no siempre dispondremos de las herramientas para hallar una función cuya transformada sea la solución de la ecuación algebraica pues, aunque existen métodos generales para calcular la inversa de la transforma de Laplace de una función, estos métodos requieren técnicas de variable compleja que quedan fuera del alcance de estas notas. No obstante, haciendo uso de los resultados que hemos visto en las secciones precedentes y de las transformadas que ya conocemos, es posible hallar la transformada inversa en muchos casos como veremos más adelante. Hay sin embargo una cuestión adicional que elucidar. La integral no varía si la función que se integra se modifica, por ejemplo, en un número finito de puntos. Por lo tanto existen infinitas funciones distintas que tienen la misma transformada de Laplace. En el ejemplo anterior hemos llegado a que la función $ty(t)$ y la función seno tienen la misma transformada de Laplace de lo que hemos concluido que eran iguales. Esto, aparentemente, presupone que sólo hay una función que tenga como transformada una función dada, lo que acabamos de ver que no es cierto. Sin embargo, en la solución del problema del ejemplo no buscamos una función cualquiera sino que buscamos una función que, entre otras cosas, ha de ser continua, e imponiendo esta condición a la función se puede demostrar que la inversa es única.

Teorema 5.5.2. *Si $f \in \mathcal{L}$ es continua, salvo quizá en discontinuidades de salto, y $\mathcal{L}[f] = 0$ entonces $f = 0$ en todos los puntos de continuidad.*

Con frecuencia en las aplicaciones de la transformada de Laplace a las ecuaciones diferenciales ordinarias aparecen transformadas que son cocientes de polinomios, con el numerador de grado menor que el del denominador. En estos casos la tarea de recuperar la función a partir de la transformada es bastante sencilla. Supongamos, por ejemplo que P y Q son dos polinomios reales, P de grado menor que Q, y que la función racional $F = P/Q$ es la transformada de Laplace de una cierta función f.

Descomponiéndola en fracciones simples, F se puede expresar como

$$F(s) = \sum_{j=1}^{n} F_j(s)$$

donde cada F_j, es de una de las dos tipos siguientes:

$$F_j(s) = \frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(s-a)^m} \tag{5.18}$$

con $a, A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathbb{R}$ y m un entero positivo, o

$$F_j(s) = \frac{A_1(s-a)+B_1}{(s-a)^2+b^2} + \frac{A_2(s-a)+B_2}{((s-a)^2+b^2)^2} + \cdots + \frac{A_m(s-a)+B_m}{((s-a)^2+b^2)^m} \tag{5.19}$$

con $a, b, A_1, B_1, \ldots, A_m, B_m \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ y m un entero positivo.[3]

[3] Obviamente, las constantes serán diferentes para cada F_j.

El ejemplo anterior, la proposición 5.1.9 apartado c) y la linealidad de la transformada de Laplace muestran que, si F_j es como en (5.18), la función

$$f_j(t) = \left(A_1 + A_2 t + \cdots + \frac{A_{j,m_j}}{(m_j-1)!} t^{m_j-1}\right) e^{at}$$

tiene como transformada de Laplace la función F_j. Si F_j es como en (5.19) la expresión de la función f_j es más complicada, aparecen factores en senos y cosenos, y tendremos que hacer uso de las transformadas de dichas funciones y de sus derivadas.

Ejemplo 5.5.3. Consideremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{3t} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases} \tag{5.20}$$

Calculando la transformada de Laplace de ambos miembros de la igualdad y teniendo en cuenta las condiciones iniciales, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{3t}](s) =& \mathcal{L}[y''](s) - 3\mathcal{L}[y'](s) + 2\mathcal{L}[y](s) = \\ =& s^2\mathcal{L}[y](s) - s - 3\left[s\mathcal{L}[y](s) - 1\right] + 2\mathcal{L}[y](s) = \\ =& (s^2 - 3s + 2)\mathcal{L}[y](s) - s + 3. \end{aligned}$$

Según vimos en 5.1.3

$$\mathcal{L}[e^{3t}](s) = \frac{1}{s-3}$$

luego

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s^2 - 3s + 2}\left[\frac{1}{s-3} + s - 3\right] = \frac{(s-3)^2 + 1}{(s^2 - 3s + 2)(s-3)}.$$

Descomponiendo en fracciones simples esta última fracción queda

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}.$$

Igualando los términos de la derecha de las dos últimas expresiones se tiene que

$$(s-3)^2 + 1 = A(s-2)(s-3) + B(s-1)(s-3) + C(s-1)(s-2)$$

y dando a s los valores $1, 2$ y 3 se llega a que

$$A = \frac{5}{2}, \quad B = -2, \quad C = \frac{1}{2}.$$

Resulta así aplicando 5.1.3 que

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{5}{2}\mathcal{L}[e^t](s) - 2\mathcal{L}[e^{2t}](s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{3t}](s).$$

Como la solución que buscamos es continua, se deduce del teorema 5.5.2 que la solución del problema (5.20) es

$$y(t) = \frac{5}{2}e^t - 2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}.$$

Como vemos en este ejemplo, aplicando el método de la transformada de Laplace se obtiene la solución del problema de valor inicial directamente, sin necesidad de hallar primero la solución general de la ecuación homogénea, una solución particular de la ecuación no homogénea y particularizar después.

Ejemplo 5.5.4. Consideremos la ecuación diferencial lineal de segundo orden con valores iniciales:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \operatorname{sen} at \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases} \tag{5.21}$$

donde a es una constante.

Calculando la transformada de Laplace de ambos miembros de la igualdad y teniendo en cuenta las condiciones iniciales, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\operatorname{sen} at](s) &= \mathcal{L}[y''](s) + 2\mathcal{L}[y'](s) + 2\mathcal{L}[y](s) \\ &= \Big(s^2\mathcal{L}[y](s)\Big) + 2\Big(s\mathcal{L}[y](s)\Big) + 2\mathcal{L}[y](s) \\ &= \left(s^2 + 2s + 2\right)\mathcal{L}[y](s). \end{aligned}$$

Despejando, obtenemos que la transformada de y es

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{\mathcal{L}[\operatorname{sen} at](s)}{s^2 + s + 2}. \tag{5.22}$$

Vimos en el ejemplo 5.1.12 que la transformada de Laplace del seno era

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen} at](s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

luego

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{a}{\left(s^2 + a^2\right)\left(s^2 + 2s + 2\right)}.$$

Descomponiendo en fracciones simples, $\mathcal{L}[y]$ se puede poner como

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{As + B}{s^2 + a^2} + \frac{Cs + D}{(s+1)^2 + 1}.$$

con A, B, C y D números reales. Para calcular estos valores, se opera en la última expresión y se igualan los coeficientes de los numeradores de las dos expresiones de la transformada, lo que nos da el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} A & + & & + & C & & & = & 0 \\ 2A & + & B & + & & + & D & = & 0 \\ 2A & + & 2B & + & a^2C & & & = & 0 \\ & & 2B & + & & + & a^2D & = & a \end{array}$$

cuya solución es

$$A = -C = -\frac{2a}{a^4+4}, \quad B = -\frac{a(a^2-2)}{a^4+4}, \quad D = \frac{a(a^2+2)}{a^4+4}.$$

En consecuencia, aplicando (5.12), (5.7), (5.12) y 5.1.9 c),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y](s) &= \frac{1}{a^4+4}\Bigg[-2a\frac{s}{s^2+a^2} + (2-a^2)\frac{a}{s^2+a^2} + \\ &\qquad + 2a\frac{s+1}{(s+1)^2+1} + a^3\frac{1}{(s+1)^2+1}\Bigg] = \\ &= \frac{1}{a^4+4}\Big[-2a\mathcal{L}[\cos at](s) + (2-a^2)\mathcal{L}[\operatorname{sen} at](s) + \\ &\qquad\qquad + 2a\mathcal{L}[e^{-t}\cos t](s) + a^3\mathcal{L}[e^{-t}\operatorname{sen} t](s)\Big] \end{aligned}$$

Como la solución que buscamos es una función de clase C^1 y por lo tanto continua, el teorema 5.5.2 nos dice que

$$y(t) = \frac{1}{a^4+4}\Big[(2-a^2)\operatorname{sen} at - 2a\cos at + e^{-t}\big(a^3\operatorname{sen} t + 2a\cos t\big)\Big]. \quad (5.23)$$

Ejemplo 5.5.5. El problema del ejemplo 5.5.3 también podía haberse resuelto haciendo uso de la convolución. En efecto, como

$$\mathcal{L}[e^{-t}\operatorname{sen} t](s) = \frac{1}{(s+1)^2+1} \quad (5.24)$$

la igualdad (5.22) nos dice que

$$\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\operatorname{sen} at]\cdot\mathcal{L}[e^{-t}\operatorname{sen} t] = \mathcal{L}[(\operatorname{sen} at) * (e^{-t}\operatorname{sen} t)]$$

de donde se deduce, haciendo uso de 5.5.2, que

$$y(t) = (\operatorname{sen} at) * (e^{-t}\operatorname{sen} t) = \int_0^t \operatorname{sen} a(t-y)e^{-y}\operatorname{sen} y\,dy.$$

Expresando el producto de senos como una suma de cosenos e integrando por partes se obtiene (5.23).

El método empleado en el ejemplo precedente para hallar la solución del problema (5.21) puede ser empleado para resolver el problema de valor inicial de segundo orden

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(t) \\ y(0) = u_0, \quad y'(0) = v_0 \end{cases} \tag{5.25}$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación y teniendo en cuenta los valores iniciales obtenemos

$$a(s^2\mathcal{L}[y](s) - su_0 - v_0) + b(s\mathcal{L}[y](s) - u_0) + c\mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[f](s)$$

y, reordenando los términos

$$(as^2 + bs + c)\mathcal{L}[y](s) - (as + b)u_0 - av_0 = \mathcal{L}[f](s).$$

Despejando se tiene que

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{(as + b)u_0 + av_0}{as^2 + bs + c} + \frac{\mathcal{L}[f](s)}{as^2 + bs + c}.$$

Si llamamos y_0 a la solución de la ecuación lineal homogénea asociada que verifica las condiciones iniciales del problema (5.25) e y_1 a la solución de la ecuación completa que verifica las condiciones iniciales $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 0$, resulta que

$$\mathcal{L}[y_0](s) = \frac{(as + b)u_0 + av_0}{as^2 + bs + c}, \quad \mathcal{L}[y_1](s) = \frac{\mathcal{L}[f](s)}{as^2 + bs + c}.$$

O bien directamente o bien descomponiendo en fracciones simples podemos hallar y_0. En cuanto a y_1, hallada la función h tal que

$$\mathcal{L}[h](s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}$$

se tiene que

$$y_1(x) = (f * h)(t) = \int_0^t f(t - y)h(y)\, dy.$$

La transformada de Laplace también puede utilizarse para hallar las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 5.5.6. Consideremos el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x' = x + 4y + e^t \\ y' = x + y + e^t \end{cases} \qquad x(0) = 2, \quad y(0) = 1. \tag{5.26}$$

Hallando la transformada de Laplace de ambos lados de las ecuaciones del sistema obtenemos

$$\begin{cases} s\mathcal{L}[x](s) - 2 = & \mathcal{L}[x](s) + 4\mathcal{L}[y](s) + \dfrac{1}{s-1} \\ s\mathcal{L}[y](s) - 1 = & \mathcal{L}[x](s) + \ \ \mathcal{L}[y](s) + \dfrac{1}{s-1} \end{cases}$$

y agrupando y reordenando los términos y denotando $X = \mathcal{L}[x]$ e $Y = \mathcal{L}[y]$, llegamos al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} (s-1)X(s) & - & 4Y(s) & = & 2 + \frac{1}{s-1} \\ -X(s) & + & (s-1)Y(s) & = & 1 + \frac{1}{s-1} \end{cases} \tag{5.27}$$

Multiplicando la segunda ecuación por $s-1$ y sumando se obtiene que

$$\left[(s-1)^2 - 4\right] Y(s) = 3 + \frac{1}{s-1} + s - 1 = \frac{s^2+s-1}{s-1}$$

y despejando se llega a que

$$Y(s) = \frac{s^2+s-1}{(s-3)(s+1)(s-1)}. \tag{5.28}$$

Para descomponer Y en fracciones simples ponemos

$$Y(s) = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-1}.$$

Reduciendo esta expresión a común denominador e igualando el numerador de la fracción resultante con el de (5.28) se tiene que

$$s^2 + s - 1 = A(s+1)(s-1) + B(s-3)(s-1) + C(s-3)(s+1).$$

Dando a s los valores $3, -1$ y 1 se llega a que $A = \frac{11}{8}$, $B = -\frac{1}{8}$ y $C = -\frac{1}{4}$. En consecuencia

$$Y(s) = \frac{11}{8}\frac{1}{s-3} - \frac{1}{8}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{s-1} = \mathcal{L}\left[\frac{11}{8}e^{3t} - \frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{t}\right](s)$$

luego

$$y(t) = \frac{11}{8}e^{3t} - \frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{t}.$$

Despejando x en la segunda ecuación del sistema (5.26) se obtiene que

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{33}{8}e^{3t} + \frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{t} - \left(\frac{11}{8}e^{3t} - \frac{1}{8}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{t}\right) + e^{t} \\ = & \frac{11}{4}e^{3t} + \frac{1}{4}e^{-t} - e^{t}. \end{aligned}$$

Aunque en este ejemplo no merece la pena porque es muy sencillo obtener x a partir del sistema original, también se puede obtener x continuando el procedimiento seguido para obtener Y. Así, sustituyendo Y por su valor en la segunda ecuación de (5.27) se obtiene que

$$X(s) = \frac{s^2+s-1}{(s-3)(s+1)} - 1 - \frac{1}{s-1} = \frac{3s+2}{(s-3)(s+1)} - \frac{1}{s-1}.$$

Si ponemos

$$\frac{3s+2}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1},$$

operando se llega a que $A = \frac{11}{4}$ y $B = \frac{1}{4}$. Por lo tanto

$$X(s) = \frac{11}{4}\frac{1}{s-3} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1} = \mathcal{L}\left[\frac{11}{4}e^{3t} + \frac{1}{4}e^{-t} - e^{t}\right](s)$$

que nos lleva nuevamente a la solución que hemos obtenido antes

$$x(t) = \frac{11}{4}e^{3t} + \frac{1}{4}e^{-t} - e^{t}.$$

5.6. Tabla de transformadas de Laplace

Cuadro 5.1: Tabla de transformadas de Laplace

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
1	$\dfrac{1}{s}$
$\begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant t < a \\ 1 & \text{si} \quad a \leqslant t < \infty \end{cases}$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$
$\begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant t < a \\ 0 & \text{si} \quad a \leqslant t < \infty \end{cases}$	$\dfrac{1-e^{-as}}{s}$
$\begin{cases} t & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leqslant t < \infty \end{cases}$	$\dfrac{1-e^{-s}}{s^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
$\sqrt{t}$	$\dfrac{1}{2s}\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\begin{cases} e^t & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 1 \\ e & \text{si} \quad 1 \leqslant t < \infty \end{cases}$	$\dfrac{e^{1-s}-s}{s(1-s)}$

Tabla de transformadas de Laplace (continuación)

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
$t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{t}} e^{-a^2/t}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{s}} e^{-2a\sqrt{s}}$
$\dfrac{1}{t\sqrt{t}} e^{-a^2/t}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-2a\sqrt{s}}$
$\operatorname{sen} at$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$
$t \operatorname{sen} at$	$\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$t \cos at$	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\operatorname{sen} at + at \cos at$	$\dfrac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\operatorname{sen} at - at \cos at$	$\dfrac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$
$\dfrac{1}{t} \operatorname{sen} at$	$\operatorname{arctg} \dfrac{a}{s}$

Tabla de transformadas de Laplace (continuación)

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
$\lvert \operatorname{sen} at \rvert$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}\coth\dfrac{\pi s}{2a}$
$\operatorname{sen} at \operatorname{sen} bt$	$\dfrac{2abs}{\left[s^2+(a-b)^2\right]\left[s^2+(a+b)^2\right]}$
$\dfrac{1}{a}\operatorname{sen} at - \dfrac{1}{b}\operatorname{sen} bt$	$\dfrac{b^2-a^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
$\cos at - \cos bt$	$\dfrac{(b^2-a^2)s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
$e^{at}\operatorname{sen} bt$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at}\cos bt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$te^{at}\operatorname{sen} bt$	$\dfrac{2b(s-a)}{\left[(s-a)^2+b^2\right]^2}$
$te^{at}\cos bt$	$\dfrac{(s-a)^2-b^2}{\left[(s-a)^2+b^2\right]^2}$
$\operatorname{senh} at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$

Tabla de transformadas de Laplace (continuación)

$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
$\operatorname{senh} at - \operatorname{sen} at$	$\dfrac{2a^3}{s^4 - a^4}$
$\cosh at - \cos at$	$\dfrac{2a^2 s}{s^4 - a^4}$
$\operatorname{sen} at \operatorname{senh} at$	$\dfrac{2a^2 s}{s^4 + 4a^4}$

5.7. Ejercicios

5.7.1. Calcula la transformada de Laplace de la función $[x]$ (parte entera de x).

5.7.2. Expresa mediante la función de Heaviside y calcula la transformada de Laplace de la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

5.7.3. Calcula la transformada de Laplace de las funciones siguientes:

a) $f(x) = e^x \operatorname{sen}^2 2x$

b) $g(x) = e^{3x} \cos 3x \cos 4x$

c) $h(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)^2 \cos 2t \, dt$

d) $u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$

5.7.4. Sabiendo que

$$\mathcal{L}[e^x f(x)] = \frac{1}{s^2 - 2s + 2},$$

calcula

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{3x} f(x)}{x}\right] \qquad \text{y} \qquad \mathcal{L}[x f(x)].$$

5.7.5. Halla la función f cuya transformada de Laplace es la función

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2 + 2s + 5}.$$

5.7.6. Calcula la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 1}{(s^2 + a^2)^2}$$

con $a \in \mathbb{R}$.

5.7.7. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

a) $\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \chi_{[0,1)}(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y''' - y'' = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 3, \quad y''(0) = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y'' + 9y = \operatorname{sen} x \chi_{[0,4]}(x) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} xy'' + (3x-1)y' - (4x+9)y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} xy'' - 4y' - xy = -6xe^x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

5.7.8. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

a) $\begin{cases} 2x' + y' - y = t \\ x' + y' = t^2 \end{cases} \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 0$

b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -37t \end{pmatrix}, \quad y(0) = (0,0)$

c) $\begin{cases} x' + 2y' + x + y + z = 0 \\ x' + y' + x + z = 0 \\ z' - 2y' - y = 0 \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 1, \quad z(0) = -2$

d) $\begin{cases} x'' + x - y = 0 \\ y'' + y - x = 0 \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0, \quad x'(0) = -2, \quad y'(0) = 1$

5.7.9. Calcula la solución particular de la ecuación diferencial

$$xy'' + 2y' + xy = \operatorname{sen} x$$

que verifica $y(0) = 0$.

5.7.10. Resuelve la ecuación integral

$$f(x) = 3 \operatorname{sen} x + 2 \int_0^x \cos(x-t) f(t)\, dt.$$

5.8. Ejercicios de controles y exámenes

5.8.1. Controles

5.8.1. a) Halla la función f cuya transformada de Laplace es la función

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s+3)}.$$

b) Halla la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 3e^x \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

utilizando la transformada de Laplace.

5.8.2. a) Halla la función f cuya transformada de Laplace es la función

$$F(s) = \frac{8s+16}{(s^2+4)(s-2)^2}.$$

b) Halla la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 9e^{2x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

utilizando la transformada de Laplace.

5.8.3. Sabiendo que

$$\mathcal{L}[e^{-x} f(x)] = \frac{1}{s^2+2s+2},$$

calcula

a) $\mathcal{L}\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]$

b) $\mathcal{L}[xe^{2x} f(x)]$

5.8.4. a) Halla la función f cuya transformada de Laplace es la función

$$F(s) = \frac{2s+1}{s(s+1)(s^2+4)}.$$

b) Halla la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'' + 4y = 1 + e^{-x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

utilizando la transformada de Laplace.

5.8.2. Exámenes

5.8.5. Se considera el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 1 - 4e^{-t}, \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = -1. \end{cases}$$

a) Halla la solución por el método de los coeficientes indeterminados.

b) Halla la solución utilizando la transformada de Laplace y comprueba que ambas soluciones coinciden.

5.8.6. a) Halla la función f cuya transformada de Laplace es la función

$$F(s) = \frac{5s + 15}{(s^2 + 9)(s - 1)}.$$

b) Halla, utilizando la transformada de Laplace, la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'' - 3y = 4x^2 \cos x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

5.8.7. a) Si $Y = Y(s)$ es la transformada de Laplace de la función $y = y(t)$, indica cuáles son las transformadas de y', y'' e $y^{(4)}$ en términos de Y.

b) Si y es la solución del problema de valor inicial

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 9\cos 2t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -3,\ y'''(0) = 0,$$

halla su transformada de Laplace Y.

c) Deduce de lo anterior la solución del problema de valor inicial del apartado precedente.

5.8.8. Resuelve, haciendo uso de la transformada de Laplace, el problema de valor inicial:

$$y'' - y' + y = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$
$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 2$$

5.8.9. Resuelve, haciendo uso de la transformada de Laplace, el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} 2ty'' + ty' - y = -3 \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

CAPÍTULO 6

Soluciones en forma de series de potencias

Hemos visto en secciones precedentes cómo resolver ecuaciones y sistemas lineales con coeficientes constantes. Sin embargo hasta ahora no hemos estudiado ningún procedimiento sistemático para resolver ecuaciones o sistemas lineales con coeficientes variables. En esta sección vamos a hacer uso de la posibilidad de expresar determinadas funciones como series de potencias para dar un procedimiento de resolución de ecuaciones lineales con coeficientes variables que nos va a servir para resolver una amplia variedad de ecuaciones de este tipo.

6.1. Series de potencias

Comenzaremos recordando brevemente, y de forma no exhaustiva, algunas cuestiones relacionadas con las series de potencias.

Una **serie de potencias** real es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

donde los coeficientes a_n y la variable x son números reales. En este caso se dice que la serie de potencias está centrada en a y a este punto se le denomina **centro** de la serie.

Ejemplo 6.1.1. La serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

se denomina **serie geométrica**. Es claro que la serie geométrica no converge si $|x| \geqslant 1$ porque, en este caso, su término general no tiende a cero. Para

$x \neq 1$, las sumas parciales de esta serie verifican la igualdad

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Como $\lim_n x^n = 0$, si $|x| < 1$, resulta que, en ese caso, la serie geométrica converge con suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}.$$

6.1.1. Radio de convergencia. Criterio del cociente

El comportamiento de la serie geométrica no es excepcional sino que, al contrario, es el comportamiento típico de las series de potencias. Toda serie de potencias converge en el interior de un intervalo y no converge en el exterior de dicho intervalo. El siguiente teorema demuestra y precisa lo anterior.

Teorema 6.1.2 (Abel). *Para cada serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ *existe un único número* R, $0 \leqslant R \leqslant +\infty$, *tal que*

a) *La serie converge absolutamente para cada* x *con* $|x - a| < R$.

b) *La serie no converge si* $|x - a| > R$.

Además la serie de potencias converge uniformemente en cada intervalo cerrado $[a - \rho, a + \rho]$, *con* $0 \leqslant \rho < R$.

Al número R se le denomina **radio de convergencia** de la serie de potencias. Si $R > 0$, se denomina **intervalo de convergencia** de la serie al conjunto $\{x \in \mathbb{R} : \ |x - a| < R\}$.

En el caso en el que $0 < R < +\infty$ el teorema anterior no nos da ninguna información acerca de la convergencia en los extremos del intervalo de convergencia. En estos puntos la serie puede converger, converger en uno y no hacerlo en el otro, o no converger en ninguno.

El radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ se puede calcular mediante la conocida como fórmula de Hadamard:

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \tag{6.1}$$

donde convenimos que $1/0 = \infty$ y $1/\infty = 0$.

El límite que aparece en la fórmula de Hadamard a veces es difícil de calcular por lo que el siguiente resultado resulta de gran utilidad en la práctica.

Proposición 6.1.3 (Criterio del cociente). *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ *una serie de potencias de coeficientes no nulos, con radio de convergencia* R. *Si la sucesión* $\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right)_n$ *converge, entonces*

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}. \tag{6.2}$$

Ejemplo 6.1.4. Una de las series de potencias más importantes es la **serie exponencial**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n. \tag{6.3}$$

El criterio del cociente muestra que el radio de convergencia de esta serie es $+\infty$. Por tanto la serie converge absolutamente en todo el plano y, además, converge uniformemente en cada intervalo cerrado.

Ejemplo 6.1.5. Otra serie importante es la **serie binómica**. Si $\alpha \neq 0$, se define para cada entero positivo n el número combinatorio

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Además se define $\binom{\alpha}{0} = 1$. La serie binómica es la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n. \tag{6.4}$$

Si α es un entero positivo m, la serie anterior es realmente un polinomio porque los coeficientes para $n > m$ son nulos. Por lo tanto, en este caso, la serie converge para cualquier número real y su suma, por la fórmula del binomio de Newton, es $(1+x)^m$. En cualquier otro caso todos los coeficientes son no nulos y el criterio del cociente nos dice que el radio de convergencia de la serie vale 1. La suma de la serie en su intervalo de convergencia es la función $(1+x)^\alpha$.

6.1.2. Operaciones con series de potencias

Proposición 6.1.6. *Sean* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n$ *dos series de potencias con radios de convergencia,* R_1 *y* R_2*, respectivamente, mayores que* 0.[1]

a) *Si* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *la serie de potencia* $\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)(x-a)^n$ *tiene radio de convergencia mayor o igual que* $\min(R_1, R_2)$ *y*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)(x-a)^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n \tag{6.5}$$

b) *Si, para cada* $n = 0, 1, \dots,$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \tag{6.6}$$

[1] Si alguno de los radios de convergencia es 0 los resultados siguen siendo ciertos en su mayor parte pero carecen de interés.

entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n$ *tiene radio de convergencia mayor o igual que* $\min(R_1, R_2)$, *y*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-a)^n\right]\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(x-a)^n\right] \tag{6.7}$$

para $|x-a| < \min(R_1, R_2)$.

c) *Si la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,(x-a)^n$ *no se anula en* a,[2] *y* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *está definida mediante las relaciones de recurrencia*

$$d_n = \frac{1}{b_0}\left[a_n - \sum_{k=0}^{n-1} d_k b_{n-k}\right] \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

entonces la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n$ *tiene radio de convergencia* $\rho > 0$ *y*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_n)^n = \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_n)^n\right]\cdot\left[\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_n)^n\right]$$

para $|x-a| < \rho$.

Si $R_1 \neq R_2$ en la proposición anterior, entonces el radio de convergencia de las nuevas series de los apartados a) y b) es exactamente el mínimo de R_1 y R_2. En el caso en que $R_1 = R_2$ el radio de convergencia puede ser mayor.

6.1.3. Derivabilidad de las funciones definidas por series de potencias

En todos aquellos puntos donde una serie de potencias converge su suma define una función. En particular, si el radio de convergencia es mayor que 0, dicha función esta definida en el intervalo de convergencia. La siguiente proposición recoge las propiedades analíticas de estas funciones:

Teorema 6.1.7. *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-a)^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia* $R > 0$. *Entonces:*

a) *Para cada* $k \geqslant 1$ *la serie de potencias*

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n\,(x-a)^{n-k} \tag{6.8}$$

tiene radio de convergencia R.

[2] Es decir, si $b_0 \neq 0$.

b) *La función*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \qquad (|x-a| < R) \tag{6.9}$$

es infinitamente derivable y, para todo $k = 1, 2, \ldots,$

$$f^{k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n (x-a)^{n-k} \tag{6.10}$$

para todo x *con* $|x-a| < R$.

c) *Para todo* $n = 0, 1, \ldots,$

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{n)}(a). \tag{6.11}$$

El último apartado nos dice que los coeficientes de una serie de potencias están unívoca mente determinados por la función suma.

Teorema 6.1.8 (Principio de identidad). *Si las sumas de las series de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n$ *coinciden en algún intervalo abierto centrado en* a *entonces* $a_n = b_n$ *para todo* n.

La siguiente tabla recoge los desarrollos en serie de potencias de algunas funciones elementales.

$$\frac{1}{a-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \cdots \qquad (|x| < a, a \neq 0)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \qquad (|x| < 1)$$

6.1.4. Funciones analíticas

Una función f se dice que es **analítica** en el punto a si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-a)^n \tag{6.12}$$

en algún intervalo abierto centrado en a. Una función se dice que es analítica en un conjunto si lo es en todos los puntos del conjunto.

La serie de potencias que aparece en (6.12) se dice que es la **serie de Taylor** de la función f alrededor del punto a. Según vimos en 6.1.7 c) los coeficientes de la serie de Taylor se relacionan con la función f mediante la relación (6.11).

Los polinomios son el ejemplo más sencillo de funciones analíticas en todos sus puntos, pero hay muchas más funciones que son analíticas en todo su dominio o en todo su dominio salvo en algunos puntos aislados. Este es el caso de las funciones elementales. Además de las propiedades de las series de potencias se deduce fácilmente que la suma, en general cualquier combinación lineal, y el producto de funciones analíticas en un punto también son funciones analíticas en dicho punto. Las derivadas de funciones analíticas también son analíticas.

El cociente de dos funciones f y g analíticas en un punto a también es analítica en a si $g(a) \neq 0$.

Si la función g se anula en a la función f/g no está definida en a. Sin embargo puede ocurrir que la función f/g coincida en todos los puntos de su dominio con una función analítica en a. En efecto, si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$$

y $a_n = b_n = 0$ para $n = 0, 1, \ldots, m-1$ y $b_m \neq 0$, poniendo

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(x-a)^n \qquad \text{y} \qquad g_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+m}(x-a)^n$$

el cociente f/g coincide con el cociente f_1/g_1 en todos los puntos donde f/g está definida. Las funciones f_1 y g_1 son analíticas en a y la función g_1 en el punto a vale b_m que es distinto de cero, luego el cociente f_1/g_1 sí está definido en a y es analítica en dicho punto. Por lo tanto f_1/g_1 es una extensión de f/g que es analítica en a. En todo lo que sigue identificaremos f/g con su extensión.[3]

[3]En general, siempre que una función analítica en un punto a coincida con otra función en un entorno del punto a, excepto quizá en el punto mismo, identificaremos ambas funciones.

6.2. Método de las series de potencias

El método de las series de potencias para resolver ecuaciones diferenciales consiste en suponer que las soluciones se puedan expresar mediante una serie de potencias y sustituyendo la serie en la ecuación intentar determinar sus coeficientes. El método tiene cierta semejanza con el método de los coeficientes indeterminados con la diferencia de que en esta ocasión hay una cantidad infinita de coeficientes que determinar. El método no siempre funciona pero cuando lo hace nos proporciona soluciones que vendrán dadas en forma de series que podrán ser expresadas o no como combinación de funciones elementales.

Ejemplo 6.2.1. Vamos a ilustrar mediante un ejemplo sencillo el método de las series de potencias. Consideremos la ecuación

$$y' + 2y = 0. \tag{6.13}$$

Si la solución en un intervalo alrededor del 0 viene expresada mediante una serie de potencias

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{6.14}$$

sustituyendo la función y su derivada en la ecuación (6.13) se obtiene que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} ((n+1)a_{n+1} + 2a_n)x^n = 0.\end{aligned}$$

Se sigue del principio de identidad que para todo $n \geqslant 0$

$$(n+1)a_{n+1} + 2a_n = 0, \tag{6.15}$$

luego

$$a_{n+1} = -\frac{2a_n}{n+1}.$$

Esta última es una relación de recurrencia que nos permite obtener el valor de cada coeficiente de la serie (6.14) conociendo el anterior. Por ejemplo, particularizando la anterior relación para $n = 0, 1, 2$ se obtienen los primeros coeficientes en función de a_0:

$$a_1 = -2a_0, \quad a_2 = -\frac{2a_1}{2} = \frac{2^2 a_0}{2}, \quad a_2 = -\frac{2a_1}{3} = -\frac{2^3 a_0}{2\cdot 3}$$

En general, si $n \geqslant 1$, se comprueba fácilmente por inducción que

$$a_n = -\frac{2a_{n-1}}{n} = \frac{2^2 a_{n-2}}{n(n-1)} = \cdots = (-1)^n \frac{2^n a_0}{n!}.$$

En consecuencia la solución que buscábamos es

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n a_0}{n!} x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = a_0 e^{-2x}.$$

Ejemplo 6.2.2. Consideremos la ecuación

$$(x-4)y' + 2y = 0. \tag{6.16}$$

Supongamos que la solución puede expresarse como una serie de potencias

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{6.17}$$

en algún intervalo abierto centrado en 0. Sustituyendo en la ecuación la serie de la solución y la de su derivada se obtiene que

$$(x-4)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

y operando

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - 4\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Poniendo todas las series en potencias de n y agrupándolas queda

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \big((n+2)a_n - 4(n+1)a_{n+1}\big) x^n = 0.$$

Por el principio de identidad, para todo $n \geqslant 0$,

$$(n+2)a_n - 4(n+1)a_{n+1} = 0$$

luego

$$a_{n+1} = \frac{(n+2)}{4(n+1)} a_n.$$

Para $n = 0, 1, 2$ se obtienen los primeros coeficiente en función de a_0:

$$a_1 = \frac{2}{4} a_0, \quad a_2 = \frac{3}{4 \cdot 2} a_1 = \frac{3}{4^2}, \quad a_3 = \frac{4}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{4}{4^3}.$$

En general, si $n \geqslant 1$

$$a_n = \frac{1}{4}\frac{n+1}{n}a_{n-1} = \frac{1}{4^2}\frac{n+1}{n-1}a_{n-2} = \cdots = \frac{1}{4^n}(n+1)a_0.$$

Sustituyendo en (6.17) se tiene que

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^n} a_0 x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^n} x^n.$$

Aplicando el criterio del cociente se obtiene que el radio de convergencia de esta serie es

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}(n+1)}{4^n(n+2)} = 4.$$

Por último, observemos que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

es la derivada de la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad (|x| < 1),$$

luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (|x| < 1).$$

Resulta así que

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^n} x^n = a_0 \frac{1}{(1-\frac{x}{4})^2} = \frac{4^2 a_0}{(4-x)^2}$$

Ejemplo 6.2.3. Consideremos la ecuación

$$x^2 y' = y - x - 1. \tag{6.18}$$

Si la solución se puede expresar como una serie de potencias

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{6.19}$$

procediendo como en los ejemplos anteriores llegamos a que

$$x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x - 1$$

luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x - 1.$$

Escribiendo ambas series en potencias de n, y separando los términos correspondientes a las potencias 0 y 1 queda

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n = -1 + a_0 + (a_1 - 1)x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n.$$

Por el principio de identidad, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ y

$$(n-1)a_{n-1} = a_n \qquad \text{para } n \geqslant 2.$$

Se tiene entonces que para $n \geqslant 2$

$$a_n = (n-1)a_{n-1} = (n-1)(n-2)a_{n-2} = \cdots = (n-1)!.$$

Resulta entonces que

$$y(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)! x^n.$$

Pero esta última serie tiene radio de convergencia 0. Esto muestra que la ecuación (6.18) no admite una solución en forma de serie de potencias de la forma (6.19) en ningún intervalo centrado en 0.

6.3. Soluciones en forma de serie en un entorno de un punto regular

El método de resolución de ecuaciones mediante series de potencias se puede emplear para resolver ecuaciones lineales de cualquier orden así como algunas ecuaciones no lineales. Sin embargo sus aplicación más importantes se encuentra en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden homogéneas de la forma

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0, \tag{6.20}$$

donde los coeficientes A, B y C son funciones analíticas. De hecho en la mayoría de las aplicaciones dichos coeficientes son polinomios.

En el ejemplo (6.18) hemos visto que el método de las series de potencias no siempre nos conduce a una solución. En esta sección vamos a estudiar en qué condiciones podemos asegurar que el método funciona. Ya vimos en el capítulo 3 que en el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales no se podía omitir la hipótesis de que el coeficiente de la derivada de mayor orden no se anulase. Si este coeficiente no se anula, dividiendo por él todos los términos, la ecuación se puede expresar en forma normal y los nuevos coeficientes siguen siendo funciones continuas o, en nuestro caso analíticas, si las originales lo eran. Si el coeficiente director se anula en algún punto, al poner la ecuación en forma normal, generalmente, los coeficientes dejaran de ser funciones continuas en dicho punto. Vamos a estudiar estos dos casos por separado.

El punto $x = a$ se dice que es un punto **regular** u **ordinario** de la ecuación (6.20) si las funciones $P = B/A$ y $Q = C/A$ son analíticas en a. En caso contrario se dice que el punto es **singular**. Si $A(a)$ no se anula las funciones P y Q son analíticas en a. Si A, B y C son polinomios sin raíces comunes entonces a es un punto regular de (6.20) si, y sólo si, $A(a) \neq 0$.

En los puntos regulares el siguiente teorema, que enunciamos sin demostración, garantiza la existencia de soluciones desarrollables en series de potencias alrededor de los puntos regulares.

Teorema 6.3.1. *Supongamos que a es un punto regular de la ecuación diferencial*

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0. \tag{6.21}$$

Entonces, todas las soluciones de la ecuación (6.21) son analíticas en a y el radio de convergencia de su serie de Taylor alrededor de a es mayor o igual que el menor de los radios de convergencia de las series de Taylor alrededor de a de las funciones B/A y C/A.

Ejemplo 6.3.2. La **ecuación de Airy** es la ecuación

$$y'' - xy = 0. \tag{6.22}$$

Todos los puntos son regulares. Del teorema anterior se deduce que, alrededor de cada punto, todas las soluciones son analíticas y están definidas en todo $\mathbb{R}$. Veamos cómo son las soluciones expresadas como series de potencias centradas en 0. Si

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{6.23}$$

sustituyendo en la ecuación se llega a

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

y, poniendo todas las series en potencias de n, y pasando la última al segundo miembro

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n.$$

Por el principio de identidad $2a_2 = 0$ y, para todo $n \geqslant 1$

$$a_{n-1} = (n+2)(n+1)a_{n+2}$$

Si $j = 0, 1$ o 2, para todo $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} a_j &= (j+2)(j+3)a_{j+3} = (j+2)(j+3)(j+5)(j+6)a_{j+6} = \cdots = \\ &= (j+2)(j+3)(j+5)(j+6)\dots(j+3n-1)(j+3n)a_{j+3n}. \end{aligned}$$

En particular, como $a_2 = 0$, se deduce de la relación anterior que $a_{2+3n} = 0$ para todo n. Para los restantes coeficientes se tiene que

$$\begin{aligned} a_{3n} &= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3n-1)(3n)} a_0 \\ a_{3n+1} &= \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \dots (3n)(3n+1)} a_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación de Airy es

$$\begin{aligned} y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3n-1)(3n)} x^{3n} + \\ + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \dots (3n)(3n+1)} x^{3n+1}. \end{aligned}$$

Calculando el radio de convergencia de las series anteriores se deduce también, sin hacer uso del teorema previo, que la solución está definida en todo $\mathbb{R}$.

Ejemplo 6.3.3. Consideremos la ecuación

$$y'' + \frac{3x}{1+x^2} y' + \frac{1}{1+x^2} y = 0. \tag{6.24}$$

Todos los puntos son regulares para esta ecuación. En particular el punto $x = 0$ es regular. Por el teorema precedente sabemos que todas las soluciones de (6.24) son analíticas en 0.

Como

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

y esta serie tiene radio de convergencia 1, las soluciones de (6.24) son analíticas, por el teorema precedente, al menos en el intervalo $(-1, 1)$.

Si

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

sustituyendo en la ecuación se llega a que

$$\begin{aligned}(1+x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 3na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n + 3na_n + a_n\right] x^n &= 0.\end{aligned}$$

Por el principio de identidad, lo anterior ocurre si, y sólo si,

$$\begin{aligned}(n+2)(n+1)a_{n+2} + \left[n(n-1)+3n+1\right] a_n &= \\ = (n+1)\left[(n+2)a_{n+2} + (n+1)a_n\right] &= 0\end{aligned}$$

para todo $n \geqslant 0$. Desplazando el índice en esta relación de recurrencia se llega a que los coeficientes de la solución verifican la relación:

$$a_n = -\frac{n-1}{n} a_{n-2}, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

En particular

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_0, \quad a_4 = -\frac{3}{4}a_2 = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}a_0, \quad a_6 = -\frac{5}{6}a_4 = -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}a_0, \ldots$$

y

$$a_3 = -\frac{2}{3}a_1, \quad a_5 = -\frac{4}{5}a_3 = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}a_1, \quad a_7 = -\frac{6}{7}a_5 = -\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}a_1, \ldots$$

lo que nos permite conjeturar que

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots 2k} a_0$$

y

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{2\cdot 4\cdots 2k}{3\cdot 5\cdots(2k+1)} a_1$$

para todo $k \geqslant 0$, lo que se prueba que es cierto fácilmente por inducción.

Ejemplo 6.3.4. La **ecuación de Hermite con parámetro** α es la ecuación

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0. \tag{6.25}$$

Todos los puntos son regulares para esta ecuación. En particular el punto $x = 0$ es regular. Por el teorema precedente sabemos que todas las soluciones de (6.25) son analíticas en 0.

Si

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

sustituyendo en la ecuación se llega a

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

y, poniendo todas las series en potencias de n,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 2\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n-\alpha)a_n\big] x^n = 0.$$

Por el principio de identidad, para todo $n \geqslant 0$,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n-\alpha)a_n = 0$$

o

$$a_{n+2} = \frac{2(n-\alpha)}{(n+2)(n+1)} a_n \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

De aquí se deduce que si $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned} a_{2n} &= (-1)^n \frac{2^n(\alpha - 2n + 2)\dots(\alpha-2)\alpha}{(2n)!} a_0, \\ a_{2n+1} &= (-1)^n \frac{2^n(\alpha - 2n + 1)\dots(\alpha-3)(\alpha-1)}{(2n+1)!} a_1. \end{aligned}$$

Si $\alpha = 2m$ es un entero positivo par los coeficientes a_{2n} con $n - 1 \geqslant m$ son nulos. En consecuencia, si $\alpha = 2m$ es un entero positivo par, haciendo $a_1 = 0$ se obtiene una familia de soluciones de (6.25) formada por polinomios de grado $2m$:

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{m} (-1)^n \frac{2^n(2m-2n+2)\dots(2m-2)2m}{(2n)!} a_0 x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{m} (-1)^n 4^n \binom{m}{n} \frac{n!}{(2n)!} a_0 x^{2n} \end{aligned}$$

Si

$$a_0 = (-1)^m \frac{(2m)!}{m!}$$

la solución correspondiente es un polinomio cuyo coeficiente director es 2^{2m}. Dicho polinomio se denomina **polinomio de Hermite de grado** $2m$ y se denota H_{2m}. Análogamente, si $\alpha = 2m + 1$ es un entero positivo impar, haciendo $a_0 = 0$ se obtiene una familia de soluciones de (6.25) formada por polinomios de grado $2m + 1$:

$$\begin{aligned} y(x) =& x + \sum_{n=1}^{m} (-1)^n \frac{2^n (2m - 2n + 2) \dots (2m - 2) 2m}{(2n + 1)!} a_1 x^{2n+1} \\ =& \sum_{n=0}^{m} (-1)^n 4^n \binom{m}{n} \frac{n!}{(2n + 1)!} a_1 x^{2n+1} \end{aligned}$$

Si

$$a_1 = (-1)^m 2 \frac{(2m + 1)!}{m!}$$

la solución correspondiente es un polinomio cuyo coeficiente director es 2^{2m+1}. Dicho polinomio se denomina **polinomio de Hermite de grado** $2m + 1$ y se denota H_{2m+1}.

Los primero polinomios de Hermite son

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12.$$

Se demuestra fácilmente, por inducción, que

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \big(e^{-x^2} \big).$$

Ejemplo 6.3.5. La **ecuación de Legendre** de orden α es la ecuación

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1) y = 0 \tag{6.26}$$

donde α es un número real mayor que -1. Esta ecuación tiene dos puntos singulares $x = \pm 1$. En consecuencia tiene una solución en serie de potencias

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

en el intervalo $(-1, 1)$. Sustituyendo en la ecuación y operando se tiene que

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} \big[n(n - 1) + 2n - \alpha(\alpha + 1) \big] a_n x = 0$$

luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + 2)(n + 1) a_{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \big[n^2 + n - \alpha(\alpha + 1) \big] a_n x.$$

Por el principio de identidad, para todo $n \geqslant 0$,

$$(n + 2)(n + 1) a_{n+2} = \big[n^2 + n - \alpha(\alpha + 1) \big] a_n = (n - \alpha)(n + \alpha + 1) a_n$$

o

$$a_{n+2} = \frac{(n-\alpha)(n+\alpha+1)}{(n+2)(n+1)}\, a_n = -\frac{(\alpha-n)(\alpha+n+1)}{(n+2)(n+1)}\, a_n.$$

Se comprueba sin dificultad que para $n > 0$

$$\begin{aligned} a_{2n} &= (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-2)\dots(\alpha-2n+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\dots(\alpha+2n-1)}{(2n)!}\, a_0, \\ a_{2n+1} &= (-1)^n \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)\dots(\alpha-2n+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\dots(\alpha+2n)}{(2n+1)!}\, a_1. \end{aligned}$$

Si $\alpha = 2m$ es un entero positivo par los coeficientes a_{2n} son cero si $n > m$ y

$$a_{2n} = \frac{(m!)^2}{(2m)!}(-1)^n \frac{(2m+2n)!}{(2n)!(m+n)!(m-n)!}\, a_0$$

si $0 \leqslant n \leqslant m$. Las soluciones para $a_1 = 0$ son, por tanto, polinomios de grado $2m$

$$y(x) = \frac{(m!)^2}{(2m)!} \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{(2m+2n)!}{(2n)!(m+n)!(m-n)!}\, a_0 x^{2n}. \tag{6.27}$$

Análogamente, si $\alpha = 2m+1$ es un entero positivo impar los coeficientes a_{2n+1} son cero si $n > m$ y

$$a_{2n+1} = \frac{(m!)^2}{(2m+1)!}(-1)^n \frac{(2m+1+2n)!}{(2n+1)!(m+n)!(m-n)!}\, a_1$$

si $0 \leqslant n \leqslant m$. En este caso, las soluciones con $a_0 = 0$ son polinomios de grado $2m+1$

$$y(x) = \frac{(m!)^2}{(2m+1)!} \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{(2m+1+2n)!}{(2n+1)!(m+n)!(m-n)!}\, a_1 x^{2n+1}. \tag{6.28}$$

Si $k = 2m$ o $k = 2m+1$, eligiendo a_0 en (6.27) y a_1 en (6.28), de manera que el coeficiente de la máxima potencia del correspondiente polinomio sea $(2k)!/\big[2^k(k!)^2\big]$, es decir eligiendo

$$a_0 = (-1)^m \frac{k!}{2^k(m!)^2} \qquad \text{y} \qquad a_1 = (-1)^m \frac{2\cdot k!}{2^k(m!)^2}$$

se obtienen los **polinomios de Legendre** de grado k

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{(2k-2n)!}{n!(k-n)!(k-2n)!}\, x^{k-2n}.$$

Aunque en los ejemplos anteriores hemos expresado las soluciones como series de potencias centradas en 0, este método es aplicable también a series centradas en otros puntos.

Ejemplo 6.3.6. Consideremos el problema de valor inicial

$$(x^2 - 2x)y'' + 5(x-1)y' + 3y = 0; \qquad y(1) = 7, \quad y'(1) = 3. \tag{6.29}$$

Como las condiciones iniciales están dadas en $x = 1$ buscaremos soluciones en un intervalo centrado en el punto 1. Como el punto 1 es regular el teorema 6.3.1 nos dice que el la ecuación tiene solución en forma de serie de potencias centrada en 1

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n.$$

Sustituyendo en la ecuación y expresando sus coeficientes en potencias de $(x-1)$ mejor que en potencias de x, se tiene que

$$\begin{aligned}\big[(x-1)^2 - 1\big] \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-2} + \\ + 5(x-1)\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n = 0.\end{aligned}$$

luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big[n(n-1) + 5n + 3\big] a_n (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n.$$

Por el principio de identidad, para todo $n \geqslant 0$

$$a_{n+2} = \frac{n^2 + 4n + 3}{(n+2)(n+1)}\, a_n = \frac{n+3}{n+2}\, a_n.$$

Se comprueba fácilmente, por inducción, que para todo $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{(2n+1)(2n-1)\dots 5\cdot 3}{(2n)(2n-2)\dots 4\cdot 2}\, a_0 = \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}\, a_0 \\ a_{2n+1} &= \frac{(2n+2)(2n)\dots 6\cdot 4}{(2n+1)(2n-1)\dots 5\cdot 3}\, a_1 = \frac{2^{2n+1}\big[(n+1)!\big]^2}{(2n+2)!}\, a_1 \end{aligned}$$

Las condiciones iniciales determinan los valores de los dos primeros términos

$$a_0 = y(1) = 7, \qquad a_1 = y'(1) = 3$$

luego, la solución del problema (6.29) es

$$y(x) = 7\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}(x-1)^{2n} + 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1}\big[(n+1)!\big]^2}{(2n+2)!}(x-1)^{2n+1}.$$

El teorema 6.3.1 nos dice que la solución es válida para $|x-1| < 1$.

6.4. Puntos singulares regulares

Normalmente una ecuación no posee una solución en forma de serie en un entorno de un punto singular por lo que el método que hemos desarrollado en la sección precedente no es válido en un entorno de esos puntos. En consecuencia es preciso buscar métodos alternativos si queremos estudiar el comportamiento de las soluciones alrededor de los puntos singulares. En el entorno de dichos puntos el comportamiento de las soluciones a menudo o no está acotado u oscila mucho lo que hace su tratamiento complicado. Sin embargo, aunque los puntos singulares sean unos pocos puntos aislados, en los modelos prácticos suelen aportar información más relevante sobre el comportamiento del modelo que los puntos regulares. Por este motivo un estudio cuidadoso de las soluciones en esos puntos es muy importante para el estudio de muchos problemas prácticos.

En esta sección vamos a ver qué se puede hacer para resolver una ecuación de la forma

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0 \tag{6.30}$$

en un entorno de un punto singular.

Comenzaremos estudiando un ejemplo sencillo que nos servirá de motivación para nuestro estudio posterior.

6.4.1. Ecuación de Euler

La **ecuación de Euler** es la ecuación

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0 \tag{6.31}$$

donde α y β son constantes reales. El 0 es el único punto singular de esta ecuación. Vamos a comenzar estudiando lo que ocurre cuando $x > 0$. Observemos en primer lugar que si $y(x) = x^r$ las funciones x^2y'' y xy' son múltiplos de la función y, lo que nos sugiere buscar soluciones de esa forma. Si $y(x) = x^r$, derivando y sustituyendo en el primer término de la ecuación llegamos a la expresión

$$x^2r(r-1)x^{r-2} + \alpha xrx^{r-1} + \beta x = x^r\big[r(r-1) + \alpha r + \beta\big] \tag{6.32}$$

que se anula para todo $x > 0$ si, y sólo si

$$r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0. \tag{6.33}$$

En consecuencia $y(x) = x^r$ es una solución de (6.31) si, y sólo si, r es una solución de la ecuación (6.33). Esa ecuación se conoce con el nombre de **ecuación indicial**. Vamos a estudiar los distintos casos que se pueden presentar.

Dos raíces reales distintas. Si $(\alpha-1)^2-4\beta>0$, la ecuación indicial tiene dos raíces reales

$$r_1=\frac{1-\alpha+\sqrt{(\alpha-1)^2-4\beta}}{2} \quad \text{y} \quad r_2=\frac{1-\alpha-\sqrt{(\alpha-1)^2-4\beta}}{2},$$

distintas y las funciones $y_1(x)=x^{r_1}$ e $y_2(x)=x^{r_2}$ son dos soluciones de la ecuación de Euler. Estas dos soluciones son linealmente independientes porque

$$W[y_1,y_2](x)=\det\begin{pmatrix} x^{r_1} & x^{r_2} \\ r_1x^{r_1-1} & r_2x^{r_2-1}\end{pmatrix}=x^{r_1+r_2-1}(r_2-r_1)(x)\neq 0.$$

En consecuencia, la solución general de la ecuación (6.31) para $x>0$ es

$$y(x)=c_1x^{r_1}+c_2x^{r_2}. \tag{6.34}$$

Raíces reales iguales. Si la ecuación (6.33) tiene una única raíz real doble

$$r_1=\frac{1-\alpha}{2},$$

el procedimiento anterior sólo nos proporciona una solución de (6.31), la función $y_1(x)=x^{r_1}$. Tenemos que hallar otra solución linealmente independiente por un procedimiento diferente. Consideremos las funciones de dos variables $y(r,x)=x^r$ y

$$\Phi(r,x)=x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(r,x)+\alpha x\frac{\partial y}{\partial x}(r,x)+\beta y(r,x).$$

Según hemos visto en (6.32)

$$\Phi(r,x)=x^r\big[r(r-1)+\alpha r+\beta\big]=x^r(r-r_1)^2.$$

Si derivamos Φ con respecto de r se obtiene, haciendo uso del teorema de las derivadas cruzadas, que

$$x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)+\alpha x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)+\beta\frac{\partial y}{\partial r}=x^r\log x(r-r_1)^2+2x^r(r-r_1).$$

En el caso particular en que $r=r_1$, el término de la derecha se anula, lo que nos dice que la función

$$y_2(x)=\frac{\partial y}{\partial r}(r_1,x)=x^{r_1}\log x \qquad x>0$$

también es solución de (6.31). Es obvio que esta solución es linealmente independiente de y_1. En consecuencia, la solución general, para $x>0$, en el caso de raíces iguales es

$$y(x)=x^{r_1}(c_1+c_2\log x). \tag{6.35}$$

Raíces complejas. Si $(\alpha-1)^2 - 4\beta < 0$, la ecuación indicial tiene dos raíces complejas conjugadas

$$r_1 = \frac{1-\alpha+\sqrt{4\beta-(\alpha-1)^2}\,i}{2} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{1-\alpha-\sqrt{4\beta-(\alpha-1)^2}\,i}{2}.$$

Esto nos dice que las funciones x^{r_1} y x^{r_2} son dos soluciones complejas de (6.31) y, por lo tanto sus partes reales e imaginarias son soluciones reales de la ecuación. Veamos cómo son estas funciones. Recordemos que la exponencial compleja de un número real $x > 0$ se define, para $r = a + bi \in \mathbb{C}$, como

$$x^r = e^{r\log x} = e^{a\log x + ib\log x} = x^a(\cos(b\log x) + i\,\mathrm{sen}(b\log x)).$$

Como las exponenciales de números conjugados son conjugadas, las dos soluciones complejas de la ecuación de Euler que hemos encontrado tienen la misma parte real y partes imaginarias opuestas por lo que únicamente nos proporcionan dos soluciones reales linealmente independientes:

$$y_1(x) = \mathrm{Re}\big(x^{r_1}\big) = x^a\cos(b\log x), \quad \text{e} \quad y_2(x) = \mathrm{Im}\big(x^{r_1}\big) = x^a\,\mathrm{sen}(b\log x),$$

donde

$$a = \frac{1-\alpha}{2} \quad \text{y} \quad b = \frac{\sqrt{4\beta-(\alpha-1)^2}}{2}. \tag{6.36}$$

Las dos soluciones anteriores son claramente linealmente independientes por lo que la solución general de la ecuación (6.31) para $x > 0$ en el caso de raíces complejas de la ecuación indicial es

$$y(x) = x^a(c_1\cos(b\log x) + c_2\,\mathrm{sen}(b\log x)) \tag{6.37}$$

donde a y b son como en (6.36).

Para estudiar el comportamiento de las soluciones para $x < 0$ basta observar que si y es solución de (6.31), la función $z(x) = y(-x)$ también es solución de la ecuación. En consecuencia, dependiendo de cómo sean las raíces de la ecuación indicial, para $x > 0$, $z(x)$ es como en (6.34), (6.35) o (6.37). Pero el comportamiento de z para $x > 0$ es precisamente el comportamiento de y para $x < 0$, por lo que podemos concluir que la solución general de (6.31) es, para $x \neq 0$

$$y(x) = \begin{cases} c_1|x|^{r_1} + c_2|x|^{r_2} & \text{si } r_1 \neq r_2 \text{ son reales} \\ |x|^{r_1}(c_1 + c_2\log|x|) & \text{si } r_1 = r_2 \\ |x|^a(c_1\cos(b\log|x|) + c_2\,\mathrm{sen}(b\log|x|)) & \text{si } r_1 = \overline{r}_2 = a+bi \end{cases} \tag{6.38}$$

donde r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación indicial.

6.4.2. Método de Frobenius

En esta sección vamos a intentar extender el método empleado en la sección precedente para una clase más amplia de ecuaciones. Observemos en primer lugar que si expresamos la ecuación de Euler en forma normal

$$y'' + \frac{\alpha}{x}y' + \frac{\beta}{x^2}y = 0$$

los coeficientes de y e y' se pueden expresar como series de potencias en las que aparecen algunas potencias negativas. Más precisamente, la ecuación anterior es un caso particular de la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

donde P y Q admiten desarrollos de la forma

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{a_0}{x-a} + a_1 + a_2(x-a) + a_3(x-a)^2 + \cdots \\ Q(x) &= \frac{b_0}{(x-a)^2} + \frac{b_1}{x-a} + b_2 + b_3(x-a) + b_4(x-a)^2 + \cdots \end{aligned}$$

en un entorno del punto a, excluido el punto.[4] Decir que P y Q tienen desarrollos de la forma anterior es equivalente a decir que las funciones $(x-a)P$ y $(x-a)^2Q$ son analíticas en $x = a$.[5]

El punto a se dice que es un **punto singular regular** de la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{6.39}$$

si es un punto singular de la ecuación y las funciones $(x-a)P$ y $(x-a)^2Q$ son analíticas en $x = a$. Un punto singular de la ecuación (6.39) que no es regular se dice que es **irregular**.

Ejemplo 6.4.1. Sabemos que 1 y -1 son los puntos singulares de la ecuación de Legendre de orden α, (6.26). Expresada en la forma (6.39) las correspondientes funciones P y Q son

$$P(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, \quad Q(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}.$$

Si $x \neq 1$

$$(x-1)P(x) = \frac{2x}{x+1}, \quad (x-1)^2Q(x) = \alpha(\alpha+1)\frac{1-x}{1+x}$$

que son funciones analíticas en 1. Esto nos dice que 1 es un punto singular regular de la ecuación de Legendre. De forma análoga se comprueba que -1 también es un punto singular regular.

[4] Si una función se puede desarrollar en serie de la manera anterior y al menos un coeficiente de una potencia negativa es no nulo se dice que la función tiene un polo en el punto a.

[5] Véase la nota 3 al pié de la página 274.

Vamos ahora a ver, siguiendo las ideas desarrolladas en el método que hemos empleado para resolver la ecuación de Euler, cómo resolver la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{6.40}$$

en un entorno de un punto singular regular. Por comodidad supondremos que este punto es el 0.[6]

Como el 0 es un punto singular regular de la ecuación (6.40), sus coeficientes P y Q se pueden poner en la forma

$$P(x) = \frac{p(x)}{x} \qquad \text{y} \qquad Q(x) = \frac{q(x)}{x^2}$$

donde

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \qquad \text{y} \qquad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

son funciones analíticas en 0. Multiplicando la ecuación (6.40) por x^2 esta se transforma en la ecuación

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0. \tag{6.41}$$

Esta última ecuación tiene un aspecto muy parecido al de la ecuación de Euler donde los parámetros han sido sustituidos por funciones analíticas. Esto nos sugiere, por analogía con el método de las series de potencias en puntos regulares y el procedimiento que hemos empleado para resolver la ecuacion de Euler, comenzar buscando soluciones de la forma

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}. \tag{6.42}$$

con $a_0 \neq 0$. La serie anterior se denomina **serie de Frobenius**.

Como hicimos al estudiar la ecuación de Euler comenzaremos estudiando las soluciones para $x > 0$. Para obtener las correspondientes soluciones para $x < 0$ basta razonar como hicimos con la ecuación de Euler, haciendo el cambio de variable $t = -x$ y resolviendo la ecuación resultante para $t > 0$.

Derivando (6.42), se tiene que

$$y'(x) = rx^{r-1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

e

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

[6] Si este no es el caso y el punto singular regular es un punto a, haciendo el cambio de variable $t = x - a$, el problema se reduce al caso considerado.

y sustituyendo en el término de la izquierda de (6.41) se llega a que

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y =$$
$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_nx^n + \left(\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^n\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\right]. \quad (6.43)$$

Según vimos en 6.1.6 b)

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}(k+r)a_k\right)x^n$$

y

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}q_{n-k}a_k\right)x^n.$$

Sustituyendo en (6.43) se obtiene que

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y =$$
$$x^r\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=0}^{n}\big(p_{n-k}(k+r)+q_{n-k}\big)a_k\right)x^n\right] =$$
$$= x^r\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n, \quad (6.44)$$

donde, para $n \geqslant 0$,

$$c_n = (n+r)(n+r-1)a_n + \sum_{k=0}^{n}\big[p_{n-k}(k+r)+q_{n-k}\big]a_k. \quad (6.45)$$

En consecuencia, la función y que aparece en (6.42) es solución de (6.41) si, y sólo si $c_n = 0$ para todo $n \geqslant 0$. En particular, para que y sea solución de (6.41) ha de ser $c_0 = 0$. Esta última condición, por ser $a_0 \neq 0$, es equivalente a que

$$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0. \quad (6.46)$$

Esta ecuación se denomina **ecuación indicial** de la ecuación (6.41).

Tenemos pues que una condición necesaria para que (6.42) sea solución de la ecuación (6.41) es que el exponente r sea solución de la ecuación indicial.

Para $n \geqslant 1$, c_n se puede poner como

$$c_n = \big((n+r)(n+r-1) + p_0r + q_0\big)\,a_n + \sum_{k=0}^{n-1}\big[p_{n-k}(k+r)+q_{n-k}\big]a_k, \quad (6.47)$$

por lo que $c_n = 0$ si, y sólo si,

$$((n+r)(n+r-1)+p_0r+q_0)\,a_n = -\sum_{k=0}^{n-1}\big[p_{n-k}(k+r)+q_{n-k}\big]a_k, \quad (6.48)$$

Si denotamos

$$F(s) = s(s-1)+p_0s+q_0, \qquad (6.49)$$

la ecuación (6.48) se pueden poner en la forma

$$F(n+r)a_n = -\sum_{k=0}^{n-1}\big[p_{n-k}(k+r)+q_{n-k}\big]a_k. \qquad (6.50)$$

En consecuencia, la función (6.42) es solución de la ecuación (6.40) para un r solución de la ecuación indicial (6.46) si, y solo si, los coeficientes a_n verifican las relaciones (6.50) para todo $n \geqslant 1$. Esta es una sucesión de relaciones de recurrencia que determinan los coeficiente a_n, a partir de los precedentes y de r, supuesto que $F(n+r)$ no se anula. De esta manera, la sucesión de los coeficientes estará completamente determinada si $F(n+r)$ no se anula para ningún $n \geqslant 1$.

Por lo tanto si r_1 es una raíz de la ecuación indicial y $F(n+r_1)$ no se anula para ningún entero $n \geqslant 1$, la función (6.42) con $r = r_1$ y los coeficientes a_n determinados por las relaciones (6.50), es solución de la ecuación (6.41). Si r_2 es la otra raíz de la ecuación indicial, la única posibilidad de que $F(n+r_1)$ se anule para algún $n \geqslant 1$ es que $r_2 = n + r_1$. Esto no puede ocurrir si r_1 y r_2 son reales y $r_1 \geqslant r_2$ o si ambas raíces son complejas.[7] En consecuencia, siempre podemos determinar, al menos, una solución de (6.41) de la forma

$$y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1)x^n \qquad x > 0 \qquad (6.51)$$

donde $a_0 = a_0(r_1)$ es un coeficiente arbitrario y el resto de los coeficientes $a_n = a_n(r_1)$ vienen dados por las relaciones de recurrencia (6.50) para $r = r_1$.

Si $r_1 = \lambda + \mu i$ es un número complejo, la solución anterior es una solución compleja. Tomando las partes real e imaginaria de dicha solución se obtienen dos soluciones reales linealmente independientes:

$$\begin{aligned} y_1(x) =& x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\alpha_n\cos(\mu\log x) - \beta_n\,\mathrm{sen}(\mu\log x)\Big]x^n \\ y_2(x) =& x^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\beta_n\cos(\mu\log x) + \alpha_n\,\mathrm{sen}(\mu\log x)\Big]x^n \end{aligned}$$

[7] Si la ecuación indicial tiene dos raíces complejas, no reales, estas han de ser conjugadas y la diferencia de dos números complejos conjugados es un número imaginario puro que no es un numero entero.

donde $a_n = \alpha_n + \beta_n i$. Como estas dos soluciones determinan un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación, el problema de hallar la solución general de la ecuación (6.41) está resuelto en este caso. Por este motivo, en lo que sigue consideremos, salvo que se diga lo contrario, que las raíces de la ecuación indicial son reales.

Si r_1 no se diferencia de r_2 en un número entero, entonces $r_2 + n \neq r_1$ para todo entero $n \geqslant 0$ y, por lo tanto, $F(r_2 + n) \neq 0$ para todo $n \geqslant 1$. En consecuencia las relaciones (6.50) determinan los coeficientes $(a_n(r_2))_n$ y, consecuentemente, una segunda solución de (6.41), linealmente independiente de la anterior,

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2) x^n, \qquad x > 0. \tag{6.52}$$

Además se puede demostrar que todas las series que aparecen en las soluciones anteriores convergen, al menos, donde $p(x)$ y $q(x)$ convergen.

Ejemplo 6.4.2. Consideremos la ecuación

$$2x^2 y'' + 3xy' - (x^2 + 1)y = 0. \tag{6.53}$$

El punto 0 es un punto singular de esta ecuación, que es de la forma (6.41) con

$$p(x) = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad q(x) = -\frac{x^2+1}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2,$$

por lo que 0 es un punto singular regular. Como p y q son polinomios las soluciones estarán definidas en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. La ecuación indicial de (6.53) es

$$F(r) = r(r-1) + \frac{3}{2}r - \frac{1}{2} = r^2 + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0 \tag{6.54}$$

que tiene raíces $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = -1$. Como ambas raíces no difieren en un entero la ecuación (6.53) tiene dos soluciones en forma de series de Frobenius cuyos coeficientes vendrán dados por las relaciones (6.50).

Como en este caso

$$p_0 = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad p_n = 0 \quad \text{si } n \geqslant 1$$

y

$$q_0 = -\frac{1}{2}. \quad q_1 = 0, \quad q_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{y} \quad q_n = 0 \quad \text{si } n > 2.$$

las relaciones (6.50) quedan

$$F(1+r)a_1 = 0$$

y

$$\left(n + r - \frac{1}{2}\right)(n + r + 1)a_n = -q_2 a_{n-2} = \frac{1}{2} a_{n-2} \quad \text{si } n > 1.$$

En consecuencia $a_1 = 0$ y

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{2(n+r-\frac{1}{2})(n+r+1)} = \frac{a_{n-2}}{(2n+2r-1)(n+r+1)} \quad \text{si } n > 1. \tag{6.55}$$

Se deduce de manera inmediata que todos los coeficientes de índice impar valen 0. Para $r = r_1$ los coeficientes pares son

$$a_{2n} = \frac{1}{2n(4n+3)} a_{2n-2} = \cdots = \frac{1}{2^n n!} \frac{a_0}{(4n+3)(4n-1)\ldots 7} \tag{6.56}$$

y para $r = r_2$

$$a_{2n} = \frac{1}{(4n-3)2n} a_{2n-2} = \cdots = \frac{1}{2^n n!} \frac{a_0}{(4n-3)(4n-7)\ldots 5 \cdot 1}. \tag{6.57}$$

En consecuencia, la solución general de (6.53) para $x > 0$ es

$$\begin{aligned} y(x) =& c_1\sqrt{x}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)\ldots 7} x^{2n}\right] + \\ &+ c_2\left[\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \frac{1}{(4n-3)(4n-7)\ldots 5 \cdot 1} x^{2n-1}\right]. \end{aligned}$$

Si y es una solución de la ecuación (6.53), la función $z(x) = y(-x)$ también es solución de la ecuación. De manera que si $x < 0$, la función $z(x) = y(|x|)$ es solución de (6.53). En consecuencia, la solución general de la ecuación (6.53) para $x > 0$ y $x < 0$ es

$$\begin{aligned} y(x) =& c_1\sqrt{|x|}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)\ldots 7} x^{2n}\right] + \\ &+ c_2\left[\frac{1}{|x|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \frac{1}{(4n-3)(4n-7)\ldots 5 \cdot 1} |x|^{2n-1}\right]. \end{aligned}$$

Nos queda por considerar el caso en que la diferencia entre las raíces es un número entero. Comencemos por el caso en que ambas raíces son iguales.

Raíces iguales

Vamos a proceder de manera semejante a como lo hicimos con la ecuación de Euler.

Sea $y(r, x)$ la función

$$y(r, x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r) x^n,$$

donde los coeficientes $a_n(r)$ son como en (6.50) si $n \geqslant 1$ y $a_0(r) = a_0$ es arbitrario, y sea

$$\Phi(r,x) = x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(r,x) + xp(x)\frac{\partial y}{\partial x}(x,r) + q(x)y(x,r). \qquad (6.58)$$

Argumentando como en la página 290 se obtiene que la función Φ coincide con la función que aparece en el segundo miembro de (6.44) reemplazando a_n por $a_n(r)$. Según vimos allí la función Φ se puede poner en la forma

$$\Phi(r,x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n(r)x^n$$

donde los coeficientes $c_n(r)$ viene dados por las relaciones (6.47) cambiando como antes a_n por $a_n(r)$. Resulta entonces que como los coeficientes $a_n(r)$ verifican las relaciones (6.50) los coeficientes $c_n(r)$ son 0 para $n \geqslant 1$ y, por tanto,

$$\Phi(r,x) = x^r c_0 = a_0 x^r F(r) = a_0 x^r (r-r_1)^2. \qquad (6.59)$$

Derivando con respecto de r las dos expresiones, (6.59) y (6.58), de la función Φ queda, haciendo uso del teorema de Schwarz de las derivadas cruzadas, que

$$x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) + xp(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) + q(x)\frac{\partial y}{\partial r} = a_0\big[x^r \log x\,(r-r_1)^2 + 2x^r(r-r_1)\big].$$

En el caso particular en que $r = r_1$, el término de la derecha se anula, lo que nos dice que la función

$$\begin{aligned} y_2(x) =& \frac{\partial y}{\partial r}(r_1,x) = x^{r_1}\left[\log x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n'(r_1)x^n\right] \\ =& y_1(x)\log x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)x^n, \end{aligned}$$

donde a_n' indica la derivada de a_n con respecto de r, es solución de (6.41).

Vamos a ilustrar lo anterior con el estudio de una de las ecuaciones más importante en las aplicaciones. Se denomina **ecuación de Bessel** de orden $p \geqslant 0$ a la ecuación

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0. \qquad (6.60)$$

La ecuación indicial de la ecuación de Bessel es

$$r(r-1) + r - p^2 = r^2 - p^2 = 0 \qquad (6.61)$$

que tiene dos soluciones $r = \pm p$. Por lo tanto la ecuación (6.60) tiene una solución de la forma

$$y_1(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad x > 0.$$

Sustituyendo en la ecuación y operando, o acudiendo directamente a las relaciones (6.50), obtenemos que $a_1 = 0$ y

$$[(n+r)^2 - p^2]a_n = -a_{n-2}, \quad n \geqslant 2. \tag{6.62}$$

Como $a_1 = 0$, se deduce de (6.62) que $a_n = 0$ para todos los índices n impares. Para los coeficientes de índice par se tiene que

$$\begin{aligned} a_{2n} &= -\frac{a_{2n-2}}{(2n+r)^2 - p^2} = \cdots \\ &= \frac{(-1)^n a_0}{\left[(2n+r)^2 - p^2\right]\left[(2n-2+r)^2 - p^2\right]\ldots\left[(2+r)^2 - p^2\right]}. \end{aligned} \tag{6.63}$$

Haciendo $r = p$ en la ecuación anterior obtenemos los coeficientes pares de la función y_1

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{(-1)^n a_0}{\left[4(n+p)n\right]\left[4(n-1+p)(n-1)\right]\ldots\left[4(1+p)\right]} \\ &= \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n!(p+n)(p+n-1)\ldots(p+1)}. \end{aligned}$$

Hemos obtenido así que la función

$$y_1(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+p}}{2^{2n} n!(p+n)(p+n-1)\ldots(p+1)} \tag{6.64}$$

es solución de (6.60). La función que se obtiene poniendo $a_0 = \left[2^p \Gamma(p+1)\right]^{-1}$ en (6.64) se denomina **función de Bessel de primera especie de orden** p y se denota J_p.

Cuando $2p$ no es un entero, la ecuación de Bessel de orden p tiene una segunda solución independiente de la anterior correspondiente a la raíz $r = -p$,

$$y_2(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-p}}{2^{2n} n!(-p+n)(-p+n-1)\ldots(-p+1)}. \tag{6.65}$$

Si $p = 0$ las dos raíces de la ecuación indicial coinciden. En este caso la primera solución de la ecuación de Bessel es

$$y_1(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} = a_0 J_0(x) \tag{6.66}$$

y, según hemos visto más arriba, la ecuación tiene una segunda solución de la forma

$$y_2(x) = y_1(x) \log x + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}'(0) x^{2n} \tag{6.67}$$

donde a'_{2n} es la derivada con respecto de r del coeficiente a_{2n} obtenido en (6.63) cuando $p = 0$. Vamos a calcular esos coeficientes suponiendo que $a_0 = 1$. Tomando logaritmos en esa expresión se tiene

$$\log |a_{2n}| = \log |a_0| - 2 \sum_{k=1}^{n} \log(2k + r)$$

y derivando con respecto de r

$$\frac{a'_{2n}}{a_{2n}} = -2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k + r}$$

luego

$$a'_{2n}(0) = -a_{2n}(0)\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

Denotando, para $n \geqslant 1$,

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \tag{6.68}$$

tenemos que

$$a'_{2n}(0) = \frac{(-1)^{n+1} H_n}{2^{2n}(n!)^2}$$

y, por tanto que la función

$$y_2(x) = J_0(x) \log x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}, \qquad x > 0$$

es la segunda solución que buscábamos.

En el siguiente apartado concluiremos el estudio de la ecuación de Bessel analizando el caso en que $2p$ es un entero distinto de cero.

Raíces que difieren en un entero

Supongamos que las raíces de la ecuación indicial son r_1 y r_2, $r_1 = r_2 + m$ con m un entero positivo. En este caso, cuando $r = r_2$, el coeficiente a_m en general no puede ser determinado a partir de las relaciones (6.50) porque $F(m + r_2) = F(r_1) = 0$ y la correspondiente relación para el coeficiente m es

$$0 = F(m + r_2)a_m = -\sum_{k=0}^{m-1} \left[p_{m-k}(k + r) + q_{m-k}\right] a_k, \tag{6.69}$$

que únicamente se puede verificar si el término de la derecha es 0, lo que, en general, no tiene por qué ser cierto. Sin embargo si ese término vale cero, cualquiera que sea la elección de a_m, se satisface la relación. Si este es el caso la función

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)x^n \tag{6.70}$$

es una solución de (6.41) independiente de y_1.

Ejemplo 6.4.3. La ecuación de Bessel de parámetro p tal que $2p$ es un entero impar m está en la situación que acabamos de describir. De la relación de recurrencia de los coeficientes para $r = -p$ (6.62) se deduce que $a_1 = 0$ y

$$\left[(n-p)^2 - p^2\right]a_n = -a_{n-2} \qquad n \geqslant 2.$$

Esto implica, en particular, que $a_{m-2} = a_{m-4} = \cdots = a_3 = a_1 = 0$ por lo que la relación anterior también se verifica cuando $n = m$ para cualquier elección del valor de a_m. Así haciendo, por ejemplo, $a_m = 0$ se tiene que todos los coeficientes impares son cero y la función (6.65) es una segunda solución independiente de y_1.

Si el término de la derecha en (6.69) no es cero, vamos a intentar resolver la ecuación utilizando el método de reducción del orden descrito en 3.2.

Haciendo el cambio $y = y_1 z$ y sustituyendo en la ecuación se obtiene

$$x^2(y_1''z + 2y_1'z' + y_1 z'') + xp(x)(y_1'z + y_1 z') + q(x)y_1 z = 0$$

que teniendo en cuenta que y_1 verifica la ecuación queda

$$x^2 y_1 z'' + x(2xy_1' + p(x)y_1)z' = 0.$$

Haciendo el cambio $u = z'$ la ecuación anterior se transforma en

$$x^2 y_1 u' + x(2xy_1' + p(x)y_1)u = 0$$

que tiene como solución

$$u(x) = \exp\left\{-\int\left(2\frac{y_1'}{y_1} + \frac{p(x)}{x}\right)\right\} dx = y_1^{-2} \exp\left\{-\int \frac{p(x)}{x}\, dx\right\}$$

de donde se deduce que

$$y_2(x) = y_1(x) \int y_1^{-2} \exp\left\{-\int \frac{p(x)}{x}\, dx\right\} \tag{6.71}$$

es otra solución de la ecuación (6.41). Por otra parte, como

$$\int \frac{p(x)}{x}\, dx = p_0 \log x + \sum_{n\geqslant 1} \frac{p_n}{n} x^n$$

resulta que

$$\exp\left\{-\int \frac{p(x)}{x}\,dx\right\} = x^{-p_0} f(x)$$

donde f es una función analítica en 0 que no se anula porque es una exponencial. Además

$$y_1^2(x) = x^{2r_1} g(x)$$

donde

$$g(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) x^n\right]^2$$

es una función analítica en 0, que no se anula en 0,[8] luego

$$\frac{\exp\left\{-\int \frac{p(x)}{x}\,dx\right\}}{y_1^2(x)} = x^{-p_0-2r_1} h(x)$$

donde $h = f/g$ es una función analítica en 0 que no se anula en 0, porque f no se anula. Si

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

como

$$p_0 - 1 = -(r_1 + r_2) = -2r_1 + m$$

se concluye que y_2 es de la forma

$$\begin{aligned}
y_2(x) =& y_1(x) \int x^{-1-m} h(x)\,dx = y_1(x) \int \left(\frac{c_m}{x} + \sum_{\substack{n=0\\ n\neq m}}^{\infty} c_n x^{n-1-m}\right) dx \\
=& c_m y_1(x) \log x + y_1(x) \sum_{\substack{n=0\\ n\neq m}}^{\infty} \frac{c_n}{n-m} x^{n-m} \\
=& c_m y_1(x) \log x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{\substack{n=0\\ n\neq m}}^{\infty} \frac{c_n}{n-m} x^n = \\
=& C y_1(x) \log x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.
\end{aligned}$$

Obsérvese que C puede ser 0 pero $b_0 = h(0)a_0 \neq 0$. Los coeficientes C y b_n se pueden obtener a través del proceso precedente, si únicamente se desean obtener unos pocos coeficientes, o por sustitución en la ecuación.

[8] La función g en 0 vale a_0^2.

Ejemplo 6.4.4. Según acabamos de ver, la ecuación de Bessel de orden p entero tiene una segunda solución de la forma

$$y_2(x) = Cy_1(x)\log x + x^{-p}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Derivando se tiene que

$$\begin{aligned} y_2'(x) =& C\left(y_1'(x)\log x + y_1(x)\frac{1}{x}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}(n-p)b_n x^{n-p-1} \\ y_2''(x) =& C\left(y_1''(x)\log x + 2\frac{y_1'(x)}{x} - \frac{y_1(x)}{x^2}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}(n-p)(n-p-1)b_n x^{n-p-2} \end{aligned}$$

y sustituyendo en (6.60) se llega, teniendo en cuenta que y_1 es solución de la ecuación, a que para que y_2 sea solución de (6.60) se ha de verificar que

$$2Cxy_1'(x) + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n-p)(n-p-1)+(n-p)-p^2\right]b_n x^{n-p} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-p+2} = 0.$$

Sustituyendo y_1 por su expresión en forma de serie (6.64), con $a_0 = \left[2^p p!\right]^{-1}$, y multiplicando todo por x^p, la anterior relación queda

$$2C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+p)}{2^{2n+p}n!(p+n)!}x^{2(n+p)} + b_1 x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\left((n-p)^2-p^2\right)b_n + b_{n+2}\right]x^n = 0.$$

Se deduce, aplicando el principio de identidad, que $b_1 = 0$,

$$\left((n-p)^2 - p^2\right)b_n = -b_{n-2} \tag{6.72}$$

si $n > 1$ es impar o $2 \leqslant n < 2p$, y

$$2C\frac{(-1)^n(2n+p)}{2^{2n+p}n!(p+n)!} + \left[(2n+p)^2 - p^2\right]b_{2(p+n)} + b_{2(p+n-1)} = 0 \tag{6.73}$$

para $n = 0, 1, \ldots$.

Se deduce de (6.72) y de que $b_1 = 0$, que $b_n = 0$ para todo n impar. Si $1 \leqslant n < p$, por (6.72),

$$\begin{aligned} b_{2n} =& \frac{b_{2(n-1)}}{4(p-n)n} = \cdots = \frac{b_0}{4^n(p-n)(p-n+1)\ldots(p-1)n!} = \\ =& \frac{(p-n-1)!}{4^n(p-1)!n!}b_0. \end{aligned} \tag{6.74}$$

Para que se satisfaga (6.73) para $n = 0$ se ha de satisfacer que

$$\frac{C}{2^{p-1}(p-1)!} + b_{2(p-1)} = 0 \tag{6.75}$$

lo que implica, aplicando (6.74), que C y b_0 están vinculados por la relación

$$C = -2^{p-1}(p-1)!\,b_{2(p-1)} = \frac{-2^{p-1}(p-1)!b_0}{4^{p-1}\big((p-1)!\big)^2} = \frac{-b_0}{2^{p-1}(p-1)!}. \tag{6.76}$$

Esto en particular implica que $C \neq 0$ por lo que podemos suponer que $C = 1$.

Como la igualdad (6.73) se verifica para $n = 0$ independientemente de cuál sea el valor de b_{2p} se puede elegir b_{2p} de manera arbitraria. Eligiendo

$$b_{2p} = -\frac{1}{2^{p+1}}\frac{H_p}{p!},$$

donde H_p es como en (6.68) se tiene, aplicando (6.73), que

$$\begin{aligned} b_{2(p+1)} &= \frac{1}{2^2(p+1)}\left[\frac{2(p+2)}{2^{p+2}(p+1)!} + \frac{1}{2^{p+1}}\frac{H_p}{p!}\right] \\ &= \frac{1}{2^{p+3}(p+1)!}\left[\frac{p+2}{p+1} + H_p\right] = \frac{H_1 + H_{p+1}}{2^{p+3}(p+1)!} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} b_{2(p+2)} &= \frac{1}{2^2(p+2)2}\left[-\frac{2(p+4)}{2^{p+4}2!(p+2)!} - \frac{H_1 + H_{p+1}}{2^{p+3}(p+1)!}\right] \\ &= \frac{-1}{2^{p+5}2!(p+2)!}\left[\frac{p+4}{2(p+2)} + H_1 + H_{p+1}\right] \\ &= \frac{-1}{2^{p+5}2!(p+2)!}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{p+2} + H_1 + H_{p+1}\right] = -\frac{H_2 + H_{p+2}}{2^{p+5}2!(p+2)!}. \end{aligned}$$

Estas dos expresiones nos hacen conjeturar que, para $n \geqslant 1$,

$$b_{2(p+n)} = (-1)^{n+1}\frac{H_n + H_{p+n}}{2^{p+1+2n}n!(p+n)!} \tag{6.77}$$

fórmula que se comprueba sin dificultad por inducción.

Hemos llegado así a la solución

$$\begin{aligned} K_n(x) = J_n(x)\log x &- \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-p}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \\ &- \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+p)!}(H_n + H_{p+n})\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \end{aligned} \tag{6.78}$$

donde $H_0 = 0$ y

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \qquad n \geqslant 1.$$

La función K_n se denomina **función de Bessel de segunda especie de clase** p.

Para concluir vamos a resumir los resultados de este capítulo en el siguiente teorema.

Teorema 6.4.5. *Supongamos que* $x = 0$ *un punto singular regular de la ecuación diferencial*

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0. \tag{6.79}$$

Sea $\rho > 0$ *el mínimo de los radios de convergencia de las series de potencias*

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad y \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n,$$

y sea I_ρ *uno de los dos intervalos abiertos* $(0, \rho)$ *o* $(\rho, 0)$*. Sean* r_1 *y* r_2 *las dos raíces de la ecuación indicial*

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0.$$

A) *Si* r_1 *y* r_2 *son reales y* $r_1 \geqslant r_2$*, entonces en el intervalo* I_ρ *existe una solución de la forma*

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{6.80}$$

con $a_0 \neq 0$*. Además en dicho intervalo existe una segunda solución linealmente independiente de la anterior* y_2*, de una de las siguientes tipos:*

I) *Si* $r_1 - r_2$ *no es entero, entonces*

$$y_2(x) = |x|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \tag{6.81}$$

con $b_0 \neq 0$*.*

II) *Si* $r_1 = r_2$*, entonces*

$$y_2(x) = y_1(x) \log |x| + |x|^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n. \tag{6.82}$$

III) *Si* $r_1 - r_2 = m$ *es un entero positivo, entonces*

$$y_2(x) = C y_1(x) \log |x| + |x|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \tag{6.83}$$

con $b_0 \neq 0$*. La constante* C *puede valer* 0*.*

B) *Si las raíces son complejas, $r_1 = \overline{r}_2 = \lambda + \mu i$, la ecuación (6.79) tiene dos soluciones linealmente independientes y_1 e y_2 en el intervalo I_ρ de la forma*

$$y_1(x) = |x|^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\alpha_n \cos(\mu \log|x|) - \beta_n \operatorname{sen}(\mu \log|x|)\Big] x^n \tag{6.84}$$

e

$$y_2(x) = |x|^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \Big[\alpha_n \operatorname{sen}(\mu \log|x|) + \beta_n \cos(\mu \log|x|)\Big] x^n \tag{6.85}$$

con $\alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0$.

Los radios de convergencia de las series de potencias que aparecen en el teorema son mayores o iguales que ρ. Los coeficientes de estas series y la constante C se pueden calcular substituyendo las expresiones en forma de series de las soluciones en la ecuación (6.79).

El correspondiente resultado para un punto singular regular $a \neq 0$ se obtiene simplemente desarrollando las funciones p y q en series de potencias centradas en a, y reemplazando x por $x - a$ en las soluciones, (véase la nota 6 al pie de la página 290). En este caso I_ρ sería o bien el intervalo $(a, a + \rho)$ o bien el intervalo $(a - \rho, a)$.

6.5. Ejercicios

6.5.1. Halla la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + k^2 y = 0,$$

donde $k \in \mathbb{R}$, en un intervalo alrededor del 0, empleando el método de las series de potencias. Identifica la solución obtenida con una función conocida.

6.5.2. Halla la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + xy' + y = 0$$

expresada en series de potencias.

6.5.3. Halla la solución general de las siguientes ecuaciones utilizando el método de las series de potencias:

a) $(1 - x^2)y'' + 2y = 0$ b) $(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Expresa las soluciones y_0 e y_1 de las ecuaciones anteriores que satisfacen las condiciones iniciales $y_0(0) = 1$, $y_0'(0) = 0$ e $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$ en términos de funciones conocidas.

6.5.4. Resuelve mediante series de potencias la **ecuación de Airy**

$$y'' - xy = 0.$$

6.5.5. Encuentra la solución general de la **ecuación de Hermite**

$$y'' - 2xy' + 2py = 0$$

con p constante, expresada en series de potencias.

6.5.6. Dada la **ecuación de Chebyshev**

$$(1 - x^2)y'' - xy' + p^2y = 0$$

con p constante,

a) Halla dos soluciones en serie de potencias linealmente independientes válidas en un intervalo $(-r, r)$.

b) Demuestra que si p es un número entero no negativo, entonces la solución de la ecuación es un polinomio de grado p.

6.5.7. Determina los puntos singulares de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales e indica si son regulares o irregulares:

a) $(1 - x^2)y'' + xy' + (1 - x)y = 0$ b) $x^3y'' + x^2y' + (1 - x)y = 0.$

6.5.8. El 0 es un punto singular de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $2xy'' + y' + xy = 0$ b) $x^2y'' + 3x(1 + 3x)y' + (1 - x^2)y = 0.$

Determina su ecuación indicial, halla sus raíces e indica la forma de las soluciones de la ecuación diferencial.

6.5.9. Comprueba que el origen es un punto singular regular de la ecuación diferencial

$$2x^2y'' + x(2x + 1)y' - y = 0$$

y resuélvela en un entorno suyo.

6.5.10. Dada la **ecuación de Laguerre**

$$xy'' + (1 - x)y' + py = 0$$

con p constante,

a) Demuestra que el origen es un punto singular regular.

b) Determina una solución para $x > 0$.

c) Prueba que si $p \in \mathbb{N}$, la solución encontrada se reduce a un polinomio.

6.6. Ejercicios de controles y exámenes

6.6.1. Controles

6.6.1. Halla la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - x^2 y = 0,$$

en un intervalo alrededor del 0, empleando el método de las series de potencias.

6.6.2. Exámenes

6.6.2. Resuelve, haciendo uso del método de las series de potencias, el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} (1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0, \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1. \end{cases}$$

6.6.3. Resuelve mediante series de potencias la ecuación diferencial

$$y'' - xy' - 2y = 0$$

en un intervalo alrededor del punto $x_0 = 0$. Halla la solución particular que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 5$, $y'(0) = -1$.

6.6.4. Resuelve, haciendo uso del método de las series de potencias, el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} (1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0, \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1. \end{cases}$$

6.6.5. Se considera la ecuación diferencial

$$xy'' - (3+x)y' + 2y = 0 \qquad (x > 0).$$

a) Demuestra que el 0 es un punto singular regular.

b) Halla las raíces de la ecuación indicial.

c) Halla una solución en forma de serie de Frobenius.

d) ¿Existe una segunda solución de la ecuación, linealmente independiente de la anterior, en forma de serie de Frobenius? En caso afirmativo hállala. Si no existe indica qué forma tiene esa segunda solución (no es preciso calcularla).

CAPÍTULO 7

Resolución numérica de ecuaciones diferenciales

En los capítulos precedentes hemos estudiado métodos de resolución de ecuaciones y sistemas. Sin embargo, como ya hemos señalado anteriormente, en la práctica son pocas las ecuaciones que se presentan en los modelos de las situaciones de la vida real que pueden resolverse dando una solución en forma explícita y que, además, pueda ser expresada mediante funciones elementales. Es por ello que, para que las ecuaciones diferenciales tengan un valor práctico, es preciso disponer de métodos que permitan aproximar las soluciones de una manera eficiente.

En este capítulo vamos a estudiar algunos métodos numéricos sencillos para aproximar las soluciones de problemas de valores iniciales del tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{7.1}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{7.2}$$

donde la función f y su derivada parcial con respecto de su segunda variable, $\frac{\partial f}{\partial y}$ son funciones continuas en algún rectángulo que contiene al punto (x_0, y_0). Esta condición, por el teorema 1.2.2, asegura que el problema dado tiene una única solución en algún intervalo que contiene al punto x_0.

A diferencia de los métodos de resolución vistos hasta ahora, los métodos numéricos no nos van a proporcionar una aproximación de la solución definida en todos los puntos del dominio de esta, sino que generarán aproximaciones a esa solución en una cantidad finita de puntos, generalmente, igualmente espaciados. En la práctica, con esta información tendremos suficiente para nuestro objetivos, pero si se desea obtener una aproximación en forma de una función definida en todo un intervalo se pueden utilizar medios de interpolación o bien lineal o bien mediante polinomios. En este último caso es bastante frecuente hacer uso de los polinomios de Hermite que estudiamos en la sección precedente.

7.1. Método de Euler

En la sección 1.4 introdujimos y analizamos el método de Euler. Este es el método más sencillo de aproximación y también el más antiguo. Este método recordamos que viene dado, para un paso h, por las ecuaciones

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + h \\ y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{7.3}$$

Vamos a profundizar ahora en el análisis del método que hicimos en 1.4, analizando con más detalle los distintos errores que se producen con este método y viendo cómo se puede modificar el método de forma que se obtengan resultados más precisos.

En todo proceso de aproximación numérico hay dos fuentes principales de errores. La primera proviene del hecho de que en los cálculos reales sólo se puede operar con números con una cantidad finita de dígitos. Esto hace que nuestros cálculos solo sean aproximados y se produzca lo que se conoce como **error de redondeo**. Este tipo de error es complicado de analizar porque, por su propia naturaleza, depende más de la implementación del método y de los medios empleados en dicha implementación que del propio método. Sin embargo, como dichos errores se propagan a través de cada operación que se realiza su impacto global en el resultado final se verá reducido si minimizamos el número de operaciones involucradas en el proceso. Por lo demás, el estudio de este tipo de error es más propio de un curso de análisis numérico y no será tratado en estas notas.

La segunda fuente de errores proviene del propio método. Los métodos de aproximación proporcionan en cada etapa valores aproximados que difieren del valor exacto en una cantidad $y(x_n) - y_n$ que se denomina **error global de truncamiento**. Este error tiene dos causas, la primera es que en cada etapa n utilizamos una fórmula de aproximación para determinar y_n; la segunda es que el dato que utilizamos de partida en cada etapa no es el valor exacto de la solución en x_{n-1}, $y(x_{n-1})$, sino una aproximación, y_{n-1}, de este valor. Si suponemos que $y(x_{n-1}) = y_{n-1}$ entonces el error que se produce en la correspondiente etapa se debe exclusivamente a la formula de aproximación empleada. Este último error se conoce como **error local de truncamiento**.

En el caso del método de Euler el error local de truncamiento es

$$e_n = y(x_n) - \big(y(x_{n-1}) + f(x_{n-1}, y_{n-1})h\big). \tag{7.4}$$

Para estimar este error vamos a utilizar el teorema de Taylor. Si y es la solución del problema de valores iniciales que estamos considerando se tiene que, para $n \geqslant 1$,

$$y(x_n) = y(x_{n-1}) + hy'(x_{n-1}) + \frac{1}{2}y''(\xi_n)h^2$$

para algún $\xi_n \in (x_{n-1}, x_n)$, y como y es solución de la ecuación (7.1)

$$y(x_n) = y(x_{n-1}) + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{1}{2}y''(\xi_n)h^2. \tag{7.5}$$

En consecuencia el error local de truncamiento es

$$e_n = y(x_n) - \big(y(x_{n-1}) + hf(x_{n-1}, y_{n-1})\big) = \frac{1}{2}y''(\xi_n)h^2. \tag{7.6}$$

Por lo tanto, el error local de truncamiento del método de Euler es proporcional al cuadrado del paso h, y el factor de proporcionalidad depende de la segunda derivada de la solución. La expresión del error que aparece en (7.6) depende de n y, en general, es diferente para cada n. Para obtener una cota válida en un intervalo $[x_0, x_0 + Nh]$ podemos acotar, por ejemplo, el valor de la segunda derivada que aparece en (7.6) por $M = \max\{|y''(x)| : x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + Nh\}$ obteniendo la estimación

$$|e_n| \leqslant \frac{M}{2}h^2 \qquad n = 1, 2, \ldots, N. \tag{7.7}$$

Antes de continuar conviene que nos detengamos un momento para hacer un par de observaciones relacionadas con la discusión previa. En primer lugar, el hecho de que utilicemos como cota para los valores de la segunda derivada de y el valor máximo de esta función en todo el intervalo puede hacer que la estimación del error que acabamos de obtener resulte poco ajustada si dicha derivada segunda experimenta grandes variaciones en el intervalo considerado. En segundo lugar, no siempre es posible conocer el valor de M y esta cota ha de ser remplazada por otra estimación de la segunda derivada que no siempre proporciona una cota realista del error. Estas consideraciones resultan relevantes si lo que se pretende es utilizar la estimaciones efectivas del error. Sin embargo, como nosotros estamos principalmente interesados en los aspectos cualitativos del mismo mas que en los cuantitativos la estimación (7.7) resulta suficiente para nuestros propósitos. Así, por ejemplo, dicha estimación nos dice que si reducimos a la mitad el paso h entonces el error se reduce en un factor de $\frac{1}{4}$.

El error local de truncamiento nos da una estimación del error cometido en cada etapa. Sin embargo, es más interesante conocer cual es el error global de truncamiento, ya que este error nos da, sin tener en consideración los errores de redondeo, una estimación de la diferencia entre el valor real y el obtenido por el método de aproximación. En principio, obtener una buena aproximación de este error es más complicado que estimar el error local. Se puede demostrar sin excesivas complicaciones el siguiente teorema que nos dice que error global de truncamiento para el método de Euler es proporcional al tamaño del paso.

Teorema 7.1.1. *Sea f una función continua en un cierto rectángulo* $\mathsf{R} \subset \mathbb{R}^2$ *y sea* $(x_0, y_0) \in \mathsf{R}$. *Supongamos que* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *es continua en* R *y que existe* $L > 0$ *tal que*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant L \qquad \text{para todo } (x,y) \in \mathsf{R}.$$

Si y es la solución del problema de valor inicial

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0, \tag{7.8}$$

en un cierto intervalo $[x_0, x_0 + hN]$, $h > 0$, *y* $M > 0$ *es tal que*

$$\left|y''(x)\right| \leqslant M, \qquad \text{para todo } x \in [x_0, x_0 + hN]$$

entonces

$$|y(x_n) - y_n| \leqslant \frac{M}{2}\,\frac{e^{L(x_n - x_0)} - 1}{L}\,h$$

para todo $n = 1, 2, \ldots, N$, *donde* $y_1, \ldots, y_N$ *son las aproximaciones generadas por el método de Euler para el paso* h *(7.3).*

7.2. Métodos de Taylor de orden superior

Un análisis del método de Euler nos sugiere un procedimiento para mejorar la estimación del error de dicho método.

Supongamos que la solución y del problema inicial

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad x_0 \leqslant x \leqslant b$$

tiene derivadas continuas hasta el orden $m+1$. Aplicando el teorema de Taylor para aproximar y por su polinomio de Taylor de grado m se obtiene que, para $h > 0$, si x y $x + h \in [x_0, b]$, entonces

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + y''(x)\frac{h}{2!} + \cdots + y^{(m)}(x)\frac{h^m}{m!} + y^{(m+1)}(\xi)\frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \tag{7.9}$$

para algún $\xi \in (x, x+h)$.

Para N entero positivo, sean

$$h = \frac{b - x_0}{N} \qquad \text{y} \qquad x_n = x_0 + nh, \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

Si denotamos $f_1 = f$,

$$f_{k+1}(x,y) = \frac{\partial f_k}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f_k}{\partial y}(x,y)f(x,y), \qquad k = 1, 2, \ldots, m,$$

y $\phi_k(x) = f_k(x, y(x))$, por la regla de la cadena se tiene que

$$\begin{aligned}\phi_{k+1}(x) =& f_{k+1}(x, y(x)) = \frac{\partial f_k}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f_k}{\partial y}(x, y(x)) f(x, y(x)) \\ =& \frac{\partial f_k}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f_k}{\partial y}(x, y(x)) y'(x) = \phi_k'(x)\end{aligned}$$

para $k = 1, 2, \ldots, m$. Se comprueba fácilmente por inducción que

$$y^{(k)}(x) = \phi_1^{(k-1)}(x) = \phi_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, m + 1.$$

Sustituyendo en la ecuación (7.9) queda, para $n = 0, 1, \ldots, N - 1$,

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) = y(x_n) &+ \phi_1(x_n) h + \phi_2(x_n) \frac{h^2}{2!} + \cdots \\ &+ \phi_m(x_n) \frac{h^m}{m!} + \phi_{m+1}(\xi_n) \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \\ = y(x_n) &+ f(x_n, y(x_n)) h + f_2(x_n, y(x_n)) \frac{h^2}{2!} + \cdots \\ &+ f_m(x_n, y(x_n)) \frac{h^m}{m!} + f_{m+1}(\xi_n, y(\xi_n)) \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \end{aligned} \tag{7.10}$$

para algún $\xi_n \in (x_n, x_{n+1})$.

El **método de Taylor de orden** n se obtiene definiendo como valor de la aproximación, el valor que queda en el miembro de la derecha de la expresión anterior, evaluando en los puntos de aproximación en lugar de en los de la solución, y suprimiendo el sumando del resto. Viene definido, para $n = 0, 1, \ldots, N - 1$, por las ecuaciones

$$\begin{cases} x_{n+1} =& x_n + h \\ y_{n+1} =& y_n + f(x_n, y_n) h + f_1(x_n, y_n) \dfrac{h^2}{2!} + \cdots + f_{m-1}(x_n, y_n) \dfrac{h^m}{m!} \end{cases} \tag{7.11}$$

El método de Taylor de orden 1 es precisamente el método de Euler.

Ejemplo 7.2.1. Vamos a aplicar los métodos de Taylor de ordenes dos y cuatro para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$y' = y - x^2 + 1, \qquad y(0) = 0{,}5 \tag{7.12}$$

en el intervalo $[0, 3]$.

Las tres primeras derivadas de la función $\phi(x) = f(x, y(x)) = y(x) - x^2 + 1$:

$$\begin{aligned}\phi'(x) =& \frac{d}{dx}(y(x) - x^2 + 1) = y'(x) - 2x = y(x) - x^2 + 1 - 2x \\ \phi''(x) =& y'(x) - 2x - 2 = y(x) - x^2 - 2x - 1 \\ \phi'''(x) =& y'(x) - 2x - 2 = y(x) - x^2 - 2x - 1,\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} f_2(x,y) =& y - x^2 - 2x + 1 \\ f_3(x,y) =& y - x^2 - 2x - 1 \\ f_4(x,y) =& y - x^2 - 2x - 1. \end{aligned}$$

En consecuencia el método de Taylor de orden 2 para el problema (7.12) viene dado por

$$\begin{cases} x_0 = 0, \quad y_0 = 0{,}5 \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} y_{n+1} =& y_n + (y_n - x_n^2 + 1)h + (y_n - x_n^2 - 2x_n + 1)\frac{h^2}{2} \\ =& y_n + h\Big[(y_n - x_n^2 + 1)\Big(1 + \frac{h}{2}\Big) - hx_n\Big] \end{aligned} \tag{7.13}$$

para $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

x	$y(x)$	Taylor 2^o-Ord.	Error	Euler	Error
0,0	0,5	0,5	0,0	0,5	0,0
0,3	1,015	1,018	0,003	0,9500	0,065
0,6	1,649	1,655	0,006	1,508	0,141
0,9	2,380	2,393	0,013	2,152	0,228
1,2	3,180	3,204	0,024	2,855	0,325
1,5	4,009	4,049	0,040	3,580	0,429
1,8	4,815	4,880	0,065	4,279	0,536
2,1	5,527	5,629	0,102	4,890	0,637
2,4	6,048	6,205	0,157	5,334	0,714
2,7	6,250	6,488	0,238	5,506	0,744
3,0	5,957	6,313	0,356	5,271	0,686

Cuadro 7.1: Comparación de los métodos de Euler y de Taylor de orden 2 para el problema (7.12).

En el cuadro 7.1 aparecen los valores reales de la solución, las aproximaciones que se obtienen con los métodos de Euler y de Taylor de orden 2 y los errores de estas aproximaciones, y en la figura 7.1 están representadas gráficamente la solución y ambas aproximaciones

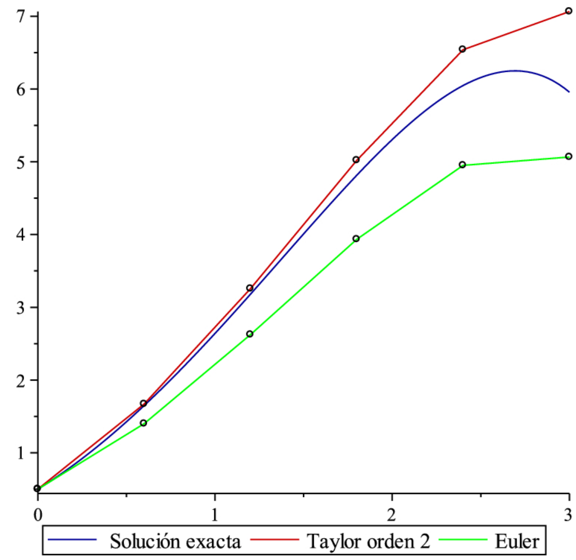


Figura 7.1: Solución del problema (7.12) y sus aproximaciones de Euler y de Taylor de orden 2.

Como puede observarse tanto en la gráfica como en el cuadro, la aproximación de Taylor de orden dos está bastante próxima a la solución exacta en la primera mitad del dominio, con un error relativo inferior al 1,5 % en $x = 1{,}8$, mientras que el método de Euler produce una aproximación con un error relativo superior al 6 % ya en $x = 0{,}3$, sin embargo a partir de $x = 1{,}8$ los errores de ambas aproximaciones tienden a acercarse, a la vez que ambas aproximaciones se alejan de la solución exacta, aunque la aproximación de Taylor sigue siendo sensiblemente mejor.

El método de Taylor de orden 4 para el problema (7.12) viene dado por

$$\begin{cases} x_0 = 0, \quad y_0 = 0{,}5 \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} y_{n+1} =& y_n + (y_n - x_n^2 + 1)h + (y_n - x_n^2 - 2x_n + 1)\frac{h^2}{2} \\ &+ (y_n - x_n^2 - 2x_n - 1)\Big(\frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!}\Big) \\ =& y_n + h\Big[(y_n - x_n^2)\Big(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{6} + \frac{h^3}{24}\Big) - x_n h\Big(1 + \frac{h}{3} + \frac{h^2}{12}\Big) \\ &+ 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{6} - \frac{h^3}{24}\Big] \end{aligned} \tag{7.14}$$

para $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

x	$y(x)$	Taylor 4^o-Ord.	Error	Taylor 2^o-Ord.	Error
0,0	0,5	0,5	0,0	0,5	0,0
0,3	1,01507	1,01508	0,00001	1,01750	0,00243
0,6	1,64894	1,64897	0,00003	1,65549	0,00655
0,9	2,38020	2,38026	0,00006	2,39343	0,01323
1,2	3,17994	3,18005	0,00011	3,20371	0,02377
1,5	4,00916	4,00933	0,00017	4,04920	0,04004
1,8	4,81518	4,81546	0,00028	4,87992	0,06474
2,1	5,52692	5,52737	0,00045	5,62869	0,10177
2,4	6,04841	6,04911	0,00070	6,20514	0,15673
2,7	6,25013	6,25119	0,00106	6,48771	0,23758
3,0	5,95723	5,95882	0,00159	6,31292	0,35569

Cuadro 7.2: Comparación de los métodos de Taylor de orden 2 y 4 para el problema (7.12).

Como puede observarse en el cuadro 7.2 el método de Taylor de orden 4, con sólo 10 pasos, da una aproximación bastante aceptable a la solución exacta y con un error notablemente inferior al producido por el método de orden 2. En la figura 7.2 se pueden ver la gráfica de la solución exacta y las aproximaciones de Taylor de ordenes 2 y 4.

Aplicando (7.10) se tiene que el error local de truncamiento del método de Taylor de orden m es

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) - \Big[y(x_n) + f(x_n, y(x_n))h + f_2(x_n, y(x_n))\frac{h^2}{2!} + \cdots + f_m(x_n, y(x_n))\frac{h^m}{m!}\Big] \\ = y(x_{n+1}) - \Big[y(x_n) + y'(x_n)h + y''(x_n)\frac{h^2}{2!} + \cdots + y^{(m)}(x_n)\frac{h^m}{m!}\Big] \\ = y^{(m+1)}(\xi_n)\frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \end{aligned} \tag{7.15}$$

para algún $\xi_n \in (x_n, x_{n+1})$ y cada $n = 0, 1, \ldots, N-1$. Como la derivada de orden $m+1$ de la función y es continua en $[x_0, b]$, está acotada, por lo que el error local de truncamiento verifica que

$$|e_n| \leqslant Mh^{m+1} \qquad n = 1, 2, \ldots, N \tag{7.16}$$

para alguna constante $M > 0$.

Como acabamos de ver los métodos de Taylor de orden superior suponen una sensible mejora con respecto al método de Euler en cuanto al orden del error local de truncamiento, sin embargo la necesidad de calcular y evaluar

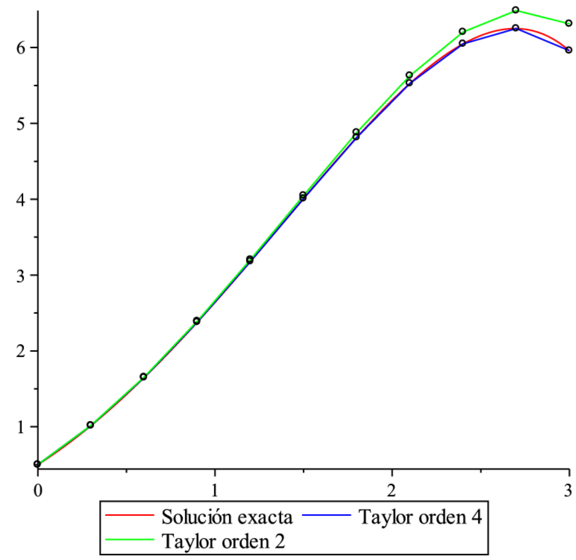


Figura 7.2: Solución del problema (7.12) y sus aproximaciones de Taylor de ordenes 2 y 4.

varias derivadas parciales hacen que estos métodos resulten complicados y lentos en ciertas ocasiones, lo que ha hecho que tradicionalmente hayan sido postergados y se hayan buscado otras opciones. En la actualidad, gracias a los importantes avances que se han producido en los últimos tiempos en los medios de computación, los métodos de Taylor han vuelto a ser una opción.

7.3. Métodos de Runge-Kutta

La idea de los métodos de Runge-Kutta es reemplazar las derivadas parciales que aparecen en los métodos de Taylor por combinaciones lineales de la función en puntos intermedios. El propio método de Euler puede ser considerado como un método de Runge-Kutta de orden 1.

7.3.1. Métodos de Runge-Kutta de segundo orden

Método de Euler modificado o del punto medio

Comenzaremos aproximando la expresión

$$\Phi_2(x,y) = f(x,y) + \frac{h}{2} f_2(x,y) = f(x,y) + \frac{h}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) f(x,y)\right] \tag{7.17}$$

que aparece en la fórmula (7.11), para el método de Taylor de orden 2. Por el teorema de Taylor para funciones de dos variables

$$f(x+u,y+v) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)v + R_1(x+u,y+v) \quad (7.18)$$

donde el resto verifica que

$$|R_1(x+u,y+v)| \leqslant C\big(|u|+|v|\big)^2 \quad (7.19)$$

para alguna constante $C>0$. El polinomio de Taylor de grado 1 que aparece en (7.18) cuando $u=\frac{h}{2}$ y $v=\frac{h}{2}f(x,y)$ coincide don Φ_2, luego

$$f\Big(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(x,y)\Big) - \Phi_2(x,y) = R_1\Big(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(x,y)\Big)$$

y, por tanto

$$\left|\Phi_2(x,y) - f\Big(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(x,y)\Big)\right| \leqslant C'h^2$$

para alguna constante C'. Esto nos dice que si reemplazamos Φ_2 por la función $f\Big(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}f(x,y)\Big)$ en el método de Taylor de orden 2, el método resultante seguirá teniendo error local de truncamiento proporcional a h^2. Este método se conoce con el nombre de **método de Euler modificado** o **método del punto medio**.[1] Esta definido por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = y_n + hf\Big(x_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}f(x_n,y_n)\Big) \end{cases} \quad n=0,1,\dots,N-1. \quad (7.20)$$

Ejemplo 7.3.1. Vamos a aproximar la solución del problema (7.12) con el método de Euler modificado y a comparar el resultado con las aproximaciones de Euler y de Taylor de orden 2.

Las ecuaciones del método de Euler modificado para este caso son:

$$\begin{cases} x_0 = 0, \quad y_0 = 0{,}5 \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf\Big(x_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}f(x_n,y_n)\Big) \\ &= y_n + h\Big(y_n + \frac{h}{2}\big(y_n - x_n^2 + 1\big) + \Big(x_n+\frac{h}{2}\Big)^2 + 1\Big) \end{aligned} \quad (7.21)$$

para $n=0,1,\dots,N-1$.

x	$y(x)$	Euler modificado	Error	Euler	Error	Taylor 2^o-Ord.	Error
0,3	1,015	1,011	0,004	0,950	0,065	1,018	0,003
0,6	1,649	1,640	0,009	1,508	0,141	1,655	0,006
0,9	2,380	2,365	0,015	2,152	0,228	2,393	0,013
1,2	3,180	3,159	0,021	2,855	0,325	3,204	0,024
1,5	4,009	3,983	0,026	3,580	0,429	4,049	0,040
1,8	4,815	4,784	0,031	4,279	0,536	4,880	0,065
2,1	5,527	5,492	0,035	4,890	0,637	5,629	0,102
2,4	6,048	6,015	0,033	5,334	0,714	6,205	0,157
2,7	6,250	6,225	0,025	5,506	0,744	6,488	0,238
3,0	5,957	5,953	0,004	5,271	0,686	6,313	0,356

Cuadro 7.3: Comparación de los métodos de Euler modificado, de Euler y de Taylor de orden 2 para el problema (7.12).

En el cuadro 7.3 aparece una tabla con los valores de la solución exacta, y las aproximaciones que dan los métodos de Euler modificado, Euler y Taylor de orden 2 con un paso $h = 10$ y sus correspondientes errores. Como puede verse en esta tabla en este caso la aproximación por el método de Euler modificado es un poco mejor que la de Taylor de orden 2 y sensiblemente mejor que la de Euler, sobre todo en las primeras etapas. En la figura 7.3 aparecen representadas en sendas gráficas la solución exacta del problema (7.12) y su aproximación por el método de Euler modificado, comparadas con las aproximaciones que se obtienen con los métodos de Euler y de Taylor de orden 2.

Método de Heun o de Euler mejorado

Si queremos repetir el proceso, pero ahora para el correspondiente término de la fórmula (7.11), para el método de Euler de orden 3, necesitaremos al menos un sumando adicional porque, según acabamos de ver, si lo intentamos con uno sólo este queda determinado ya por Φ_2. Si intentamos obtener una expresión de la forma

$$a_1 f(x, y) + a_2 f(x + \alpha, y + \beta) \tag{7.22}$$

se comprueba que no es posible. Sin embargo esta expresión si nos aproxima Φ_2 eligiendo convenientemente los parámetros a_1, a_2, α y β. Haciendo uso de

[1]Esta denominación de los métodos de Runge-Kutta de orden 2 no es estándar y puede variar de un texto a otro.

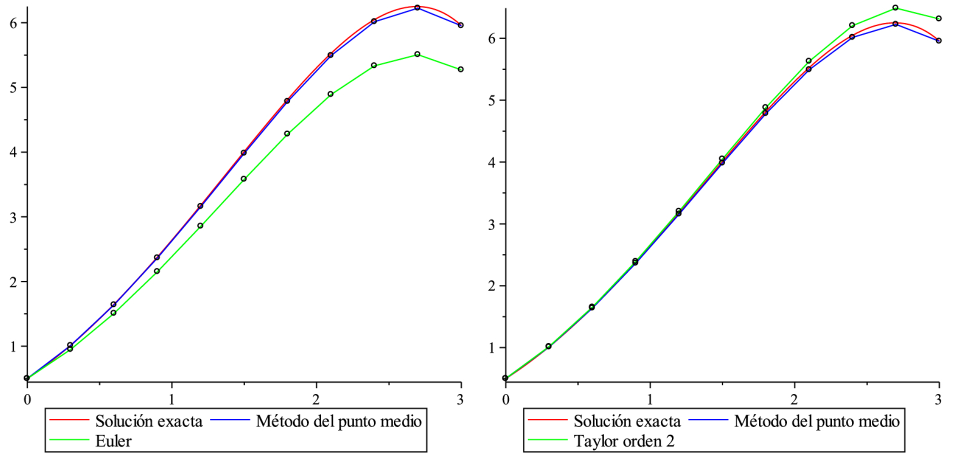


Figura 7.3: Gráfica de la solución exacta del problema (7.12) y sus aproximaciones por los métodos de Euler modificado, Euler y Taylor de orden 2.

la fórmula de Taylor (7.18) se tiene que

$$\begin{aligned} a_1 f(x,y) &+ a_2 f(x+\alpha, y+\beta) \\ &= (a_1+a_2) f(x,y) + a_2 \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\beta + R_1(x+\alpha, y+\beta) \right] \end{aligned} \tag{7.23}$$

donde el resto verifica que

$$|R_1(x+\alpha, y+\beta)| \leqslant C\big(|\alpha| + |\beta|\big)^2 \tag{7.24}$$

para alguna constante $C > 0$. Si elegimos loa parámetros de manera que

$$a_1 + a_2 = 1, \quad a_2\alpha = \frac{h}{2} \quad \text{y} \quad a_2\beta = \frac{h}{2} f(x,y) \tag{7.25}$$

resulta que

$$\Phi_2(x,y) - \big[a_1 f(x,y) + a_2 f(x+\alpha, y+\beta)\big] = R_1(x+\alpha, y+\beta)$$

lo que, argumentando como en 7.3.1, muestra que el método resultante de remplazar Φ_2 por la función $a_1 f(x,y) + a_2 f(x+\alpha, y+\beta)$ en el método de Taylor de orden 2 seguirá teniendo error local de truncamiento proporcional a h^2.

Las posibilidades de elección de funciones del tipo (7.22) con los parámetros satisfaciendo las condiciones (7.25) son infinitas y todas ellas producen métodos de orden 2.

La elección $a_1 = 0$, produce el método de Euler modificado que hemos visto anteriormente. La elección $a_1 = 1/2$ da lugar al metodo que se conoce como **método de Heun** o **método de Euler mejorado**. Este método está definido por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\Big[f(x_n, y_n) + f\big(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)\big)\Big] \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \tag{7.26}$$

En el cuadro 7.4 aparece comparado este método con los método de Euler modificado y de Taylor de orden 2. En este caso el método de Euler modificado proporciona una aproximación bastante mejor que los otros dos métodos.

x	$y(x)$	Heun	Error	Euler modificado	Error	Taylor 2^o-Ord.	Error
0,0	0,5	0,5	0,0	0,5	0,0	0,5	0,0
0,3	1,0151	1,0040	0,0111	1,0108	0,0043	1,0175	0,0024
0,6	1,6489	1,6238	0,0251	1,6397	0,0092	1,6555	0,0066
0,9	2,3802	2,3374	0,0428	2,3654	0,0148	2,3934	0,0132
1,2	3,1799	3,1148	0,0651	3,1593	0,0206	3,2037	0,0238
1,5	4,0092	3,9161	0,0931	3,9826	0,0266	4,0492	0,0400
1,8	4,8152	4,6874	0,1278	4,7837	0,0315	4,8799	0,0647
2,1	5,5269	5,3562	0,1707	5,4925	0,0344	5,6287	0,1018
2,4	6,0484	5,8252	0,2232	6,0152	0,0332	6,2051	0,1567
2,7	6,2501	5,9632	0,2869	6,2254	0,0247	6,4877	0,2376
3,0	5,9572	5,5939	0,3633	5,9534	0,0038	6,3129	0,3557

Cuadro 7.4: Comparación de los métodos de Heun, de Euler modificado y de Taylor de orden 2 para el problema (7.12).

7.3.2. Método de Runge-Kutta

De forma análoga a como lo hemos hecho en la sección precedente, pero con cálculos cada vez más complejos, se definen los métodos de Runge-Kutta de orden mayor que 2. El método del que nos ocuparemos en esta sección es el que originalmente desarrollaron Runge y Kutta, y que ha dado nombre a esta familia de métodos, y que actualmente se conoce con el nombre de método de Runge-Kutta de cuarto orden clásico o simplemente **método de**

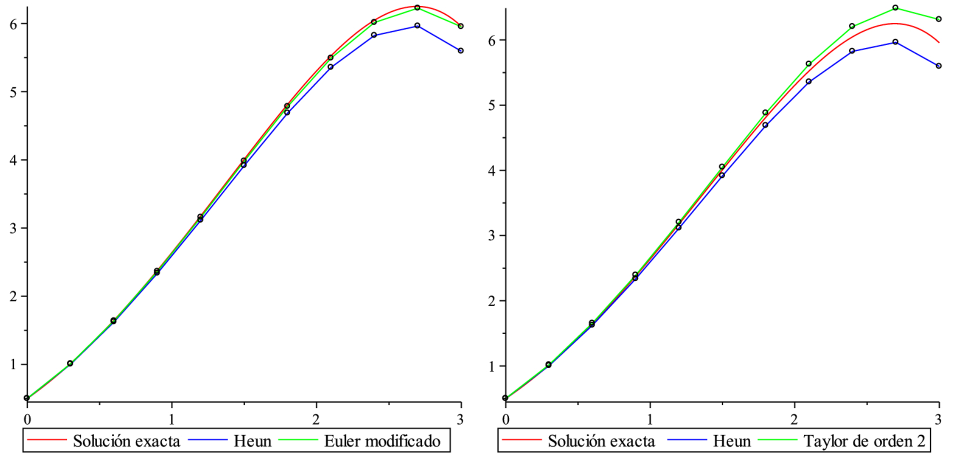


Figura 7.4: Gráfica de la solución exacta del problema (7.12) y sus aproximaciones por los métodos de Heun, Euler modificado, y Taylor de orden 2.

Runge-Kutta. Viene definido por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = y_n + h\left(\dfrac{k_{n,1} + 2k_{n,2} + 2k_{n,3} + k_{n,4}}{6}\right) \end{cases} \tag{7.27}$$

donde

$$\begin{aligned} k_{n,1} &= f(x_n, y_n) \\ k_{n,2} &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_{n,1}\right) \\ k_{n,3} &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_{n,2}\right) \\ k_{n,4} &= f(x_{n+1}, y_n + k_{n,3}) \end{aligned} \tag{7.28}$$

para $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

Este método tiene un error local de truncamiento proporcional a h^5. En consecuencia es un método mucho más preciso que los métodos que hemos visto hasta ahora.

En el cuadro 7.5 aparecen comparadas las aproximaciones de la solución del problema (7.12) obtenidas con el método de Runge-Kutta de orden 4 y con el método de Euler modificado, que es el método Runge-Kutta de orden 2 que mejor se comporta en este problema.

Para estimar la eficiencia de los distintos métodos no sólo hay que tener en cuenta el error que se comete en la aproximación sino también el esfuerzo de cálculo que hay que hacer para obtenerlo. En este sentido, y teniendo en cuenta que dicho esfuerzo viene fundamentalmente determinado por el

x	$y(x)$	Runge-Kutta de orden 4	Error	Euler modificado	Error
0,0	0,5	0,5	0,0	0,5	0,0
0,2	0,8292986	0,8292933	0,0000052	0,8280000	0,0012986
0,4	1,2140877	1,2140762	0,0000115	1,2113600	0,0027277
0,6	1,6489406	1,6489220	0,0000186	1,6446592	0,0042814
0,8	2,1272295	2,1272027	0,0000268	2,1212842	0,0059453
1,0	2,6408591	2,6408227	0,0000364	2,6331668	0,0076923
1,2	3,1799415	3,1798942	0,0000473	3,1704634	0,0094781
1,4	3,7324000	3,7323401	0,0000599	3,7211654	0,0112346
1,6	4,2834838	4,2834095	0,0000743	4,2706218	0,0128620
1,8	4,8151763	4,8150857	0,0000906	4,8009586	0,0142177
2,0	5,3054720	5,3053630	0,0001090	5,2903695	0,0151025

Cuadro 7.5: Comparación de los métodos de Runge-Kutta de orden 4 y de Euler modificado para el problema (7.12).

número de evaluaciones que hay que hacer de la función f, hay que hacer notar que mientras el método de Euler sólo requiere una evaluación en cada etapa y los métodos de runge-Kutta de orden dos requieren dos, el método de Runge-Kutta clásico requiere cuatro. Por este motivo a la hora de medir la eficiencia de estos métodos es conveniente comparar el número de pasos requeridos por los distintos métodos para alcanzar una determinada precisión.

En los cuadros 7.6 y 7.7 aparecen comparadass distintas aproximaciones de la solución del problema (7.12) obtenidas con los métodos de Euler, de Heun, de Euler modificado y de Runge-Kutta de orden 4 con distintos pasos. En las tablas únicamente aparecen los valores de las aproximaciones en aquellos puntos en que todas están definidas. En el primer cuadro se puede observar cómo con un paso 60 veces menor el método de Euler produce peores aproximaciones que el método de Runge-Kutta de orden 4. También se observa como el método de Runge-Kutta clásico proporciona hasta $x = 2{,}4$ una aproximación mejor que la aproximación por el método de Euler modificado con un paso cuatro veces más pequeño. En el segundo cuadro se comparan los dos métodos de Runge-Kutta de orden dos que hemos estudiado con el método de Runge-Kutta de orden 4. En este cuadro se observa que son necesarios pasos 20 veces más pequeños en el método de Heun para obtener aproximadamente los mismos resultados que con el método de Runge-Kutta de orden 4. También se confirma que para este problema el método de Euler modificado proporciona una mejor aproximación que el método de Heun.

x	$y(x)$	Euler $h = 0{,}005$	Error	Euler modificado $h = 0{,}075$	Error	Runge-Kutta de orden 4 $h = 0{,}3$	Error
0,0	0,5000	0,5000	0,0000	0,5000	0,0000	0,5000	0,0000
0,3	1,0151	1,0138	0,0012	1,0148	0,0003	1,0150	0,0000
0,6	1,6489	1,6462	0,0027	1,6483	0,0006	1,6489	0,0001
0,9	2,3802	2,3757	0,0045	2,3792	0,0010	2,3800	0,0002
1,2	3,1799	3,1733	0,0066	3,1786	0,0014	3,1797	0,0002
1,5	4,0092	4,0002	0,0090	4,0074	0,0017	4,0088	0,0003
1,8	4,8152	4,8036	0,0116	4,8132	0,0020	4,8147	0,0004
2,1	5,5269	5,5126	0,0143	5,5248	0,0021	5,5263	0,0006
2,4	6,0484	6,0315	0,0169	6,0466	0,0018	6,0477	0,0008
2,7	6,2501	6,2311	0,0190	6,2492	0,0010	6,2492	0,0010
3,0	5,9572	5,9373	0,0199	5,9581	0,0009	5,9561	0,0012

Cuadro 7.6: Comparación de los métodos de Runge-Kutta de orden 4, de Euler y de Euler modificado con distintos pasos para el problema (7.12).

7.4. Métodos multipasos

Los métodos considerados en este capítulo pertenecen a la categoría de lo que se denominan **métodos de un paso**. Esta denominación se debe a que para el cálculo de la aproximación en una etapa determinada sólo hacen uso de la aproximación obtenida en la etapa anterior. Existe otro tipo de métodos conocidos como **métodos multipasos** que hacen uso de más de una de las aproximaciones obtenidas en las etapas precedentes para determinar la aproximación en el siguiente punto. Sin entrar en detalles, vamos a presentar dos de los métodos multipasos mas populares. Los métodos de Adams-Bashforth y Adams-Moulton son como los métodos de Runge-Kutta dos familias de métodos de distintos órdenes. Citaremos como ejemplo los correspondientes métodos de segundo y cuarto orden. Para simplificar la escritura de estos métodos denotaremos, para $k = 0, 1, \ldots,$, por f_k al valor de f en el punto (x_k, y_k).

El **método de Adams-Bashforth de dos pasos** o **de segundo orden** está definido por las ecuaciones

$$y_1 = \alpha_1 \tag{7.29}$$

e

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big[3f_n - f_{n-1}\big] \tag{7.30}$$

para $n = 1, \ldots, N-1$. Este método tiene un error local de truncamiento proporcional a h^3.

x	$y(x)$	Heun $h = 0{,}015$	Error	Euler modificado $h = 0{,}075$	Error	Runge-Kutta de orden 4 $h = 0{,}3$	Error
0,0	0,5000	0,5000	0,0000	0,5000	0,0000	0,5000	0,0000
0,3	1,0151	1,0150	0,0000	1,0148	0,0003	1,0150	0,0000
0,6	1,6489	1,6489	0,0001	1,6483	0,0006	1,6489	0,0001
0,9	2,3802	2,3801	0,0001	2,3792	0,0010	2,3800	0,0002
1,2	3,1799	3,1798	0,0002	3,1786	0,0014	3,1797	0,0002
1,5	4,0092	4,0089	0,0003	4,0074	0,0017	4,0088	0,0003
1,8	4,8152	4,8148	0,0004	4,8132	0,0020	4,8147	0,0004
2,1	5,5269	5,5264	0,0005	5,5248	0,0021	5,5263	0,0006
2,4	6,0484	6,0478	0,0006	6,0466	0,0018	6,0477	0,0008
2,7	6,2501	6,2493	0,0008	6,2492	0,0010	6,2492	0,0010
3,0	5,9572	5,9562	0,0010	5,9581	0,0009	5,9561	0,0012

Cuadro 7.7: Comparación de métodos de Runge-Kutta de orden 2 y 4 con distintos pasos para el problema (7.12).

El **método de Adams-Bashforth de cuatro pasos** o **de cuarto orden** está definido por las ecuaciones

$$y_1 = \alpha_1, \quad y_2 = \alpha_2, \quad y_3 = \alpha_3 \tag{7.31}$$

e

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\big[55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}\big] \tag{7.32}$$

para $n = 3, \ldots, N-1$. Este método tiene un error local de truncamiento proporcional a h^5.

El **método de Adams-Moulton de segundo orden** está definido por las ecuaciones

$$y_1 = \alpha_1 \tag{7.33}$$

e

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big[f_n + f_{n+1}\big] \tag{7.34}$$

para $n = 1, \ldots, N-1$. Este método tiene un error local de truncamiento proporcional a h^3.

El **método de Adams-Moulton de tres pasos** está definido por las ecuaciones

$$y_1 = \alpha_1, \quad y_2 = \alpha_2, \tag{7.35}$$

e

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\big[9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}\big] \tag{7.36}$$

para $n = 2, \ldots, N-1$. Este método tiene un error local de truncamiento proporcional a h^5. Este método también se conoce como **método de Adams-Moulton de cuarto orden**.

Estos métodos requieren conocer a priori los valores iniciales que generalmente suelen ser generados por un método de Runge-Kutta del mismo orden.

En las ecuaciones (7.34) y (7.36) que definen los métodos de Adams-Moulton de orden dos y cuatro, la aproximación y_{n+1} está definida de forma implícita ya que también aparece en el término de la derecha en $f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$. Por este motivo se dice que estos métodos son **métodos implícitos**. Los métodos en los que la aproximación que se está definiendo aparece despejada se dice que son **métodos explícitos**.

En general los métodos de Adams-Moulton proporcionan mejores aproximaciones que los métodos de Adams-Bashforth del mismo orden. Sin embargo, los métodos implícitos presentan la complicación de que primero han de obtener una representación explícita del término y_{n+1} resolviendo la ecuación que lo define, lo que no siempre es posible. En este caso se podría utilizar el método de Newton o el de la secante para aproximar pero esto complica mucho el proceso. En la práctica, los métodos implícitos se suelen utilizar en conjunción con métodos explícitos combinando ambos métodos. Estos métodos se denominan **métodos predictor-corrector**. Un ejemplo de estos métodos es el **método Adams-Bashforth-Moulton**. En este método se utiliza el método Adams-Bashforth como predictor para obtener una primera aproximación y^*_{n+1} y se utiliza este valor en el término de la derecha de la correspondiente fórmula del método de Adams-Moulton, que se utiliza como corrector, para obtener la aproximación y_{n+1} que mejora la que hemos obtenido anteriormente. El corrector se puede volver a utilizar con la nueva aproximación hallada para obtener una mejor aproximación de y_{n+1} y el proceso se puede repetir las veces que se quiera.

En el cuadro 7.8 se observa cómo, a pesar de ser ambos métodos del mismo orden, el método de Adams-Moulton proporciona una aproximación bastante mejor que la de Adams-Bashforth.

7.5. Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden

Las mismas fórmulas, cambiando funciones escalares por funciones vectoriales, se aplican para aproximar las soluciones de problemas de valor inicial de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer grado de la forma

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0. \tag{7.37}$$

También se pueden aplicar a ecuaciones diferenciales de orden superior reduciéndolas a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

x	$y(x)$	Adams-Bashforth de 4 pasos	Error	Adams-Moulton de 3 pasos	Error	Adams-Bashforth-Moulton de orden 4	Error
0,0	0,5	0,5	0,0	0,5	0,0	0,5	0,0
0,3	1,0151	1,0150	0,0001	1,0150	0,0001	1,0150	0,0001
0,6	1,6489	1,6489	0,0	1,6489	0,0	1,6489	0,0
0,9	2,3802	2,3800	0,0002	2,3800	0,0002	2,3800	0,0002
1,2	3,1799	3,1805	0,0006	3,1796	0,0003	3,1797	0,0002
1,5	4,0092	4,0112	0,0020	4,0086	0,0006	4,0089	0,0003
1,8	4,8152	4,8196	0,0044	4,8143	0,0009	4,8149	0,0003
2,1	5,5269	5,5350	0,0081	5,5255	0,0014	5,5265	0,0004
2,4	6,0484	6,0622	0,0138	6,0462	0,0022	6,0480	0,0004
2,7	6,2501	6,2728	0,0227	6,2467	0,0034	6,2496	0,0005
3,0	5,9572	5,9931	0,0359	5,9522	0,0050	5,9566	0,0006

Cuadro 7.8: Comparación de las aproximaciones de la solución del problema (7.12) que se obtienen por los métodos de Adams-Bashforth, Adams-Moulton y Adams-Bashforth-Moulton de orden cuatro.

7.6. Consideraciones finales

En los métodos numéricos que hemos considerados en las secciones precedentes nos hemos limitado a considerar métodos de paso constante. Sin embargo, en ocasiones sucede que el error local de truncamiento difiere mucho de una región a otra, de manera que para alcanzar un cierto nivel de precisión en una región se requiera un paso mucho más pequeño que el que se requiere para alcanzar la misma precisión en otra. Obviamente una opción es elegir el paso menor para la aproximación pero esta solución, aparte de su carácter ineficiente por hacernos efectuar más trabajo del requerido para aproximar en determinadas regiones, tiene el inconveniente adicional de que al aumentar él numero de cálculos necesarios también aumentan las probabilidades de aumentar el error de redondeo. Para evitar estos problemas, en la práctica se utiliza una técnica que consiste en fijar un cierto nivel de tolerancia del error global e ir modificando el paso para mantener el error por debajo de ese nivel de tolerancia. Este tipo de métodos numéricos con pasos variables se denominan **métodos adaptativos**. Uno de estos métodos es el **método de Runge-Kutta-Fehlberg** que hace uso de un método de Runge-Kutta de orden cinco para estimar el error local de un método de Runge-Kutta de cuarto orden y ajustar el paso. Aunque no vamos a entrar en los detalles de este método, hemos incluido una tabla, cuadro 7.9, en la que se puede comprobar la efectividad de este método para aproximar la solución del problema (7.12).

x	$y(x)$	Runge-Kutta Fehlberg	Error
0,0	0,5	0,50000	0,0
0,3	1,01507	1,01507	0,00000062164
0,6	1,64894	1,64894	0,00000070560
0,9	2,38020	2,38020	0,00000171651
1,2	3,17994	3,17994	0,00000158032
1,5	4,00916	4,00916	0,00000390422
1,8	4,81518	4,81518	0,00000301209
2,1	5,52692	5,52692	0,00000357138
2,4	6,04841	6,04841	0,00000385194
2,7	6,25013	6,25014	0,00000687674
3,0	5,95723	5,95724	0,00000623969

Cuadro 7.9: Aproximación de la solución del problema (7.12) producida por el método de Runge-Kutta-Fehlberg.

Dos aspectos importantes de los métodos de aproximación que hay que tener en cuenta cuando se hace uso de ellos para aproximar numéricamente la solución de un problema de valores iniciales son la convergencia y la estabilidad del método. De manera informal podemos decir que un método es convergente si las aproximaciones que proporciona el método tienden a la solución de la ecuación cuando el paso tiende a 0 y que un método es estable si pequeños cambios en las condiciones iniciales producen cambios también pequeños en la aproximaciones posteriores. La importancia de la estabilidad estriba en que tanto al utilizar los valores iniciales como las sucesivas aproximaciones no trabajamos con valores exactos, por lo que necesitamos garantizar que los errores introducidos no produzcan resultados que se separen mucho de la solución real del problema. Obviamente si el problema que queremos aproximar no es estable no podemos esperar que la aproximación numérica lo sea. Sin embargo, puede ocurrir que el problema que estamos estudiando sea estable y que el procedimiento numérico de aproximación que estemos utilizando no sea estable. En muchas ocasiones evitar esto requiere imponer condiciones sobre el paso h.

En la elección de un método de aproximación para la resolución numérica de un problema de valores iniciales son varios los factores que hay que tener en consideración. Como ya hemos señalado antes, para conseguir un cierto grado de precisión o garantizar la estabilidad del proceso, puede ser necesario imponer ciertas restricciones sobre el tamaño del paso h. Ya hemos comentado que un h muy pequeño puede requerir hacer muchos cálculos lo que puede hacer que se introduzcan errores de redondeo y que el proceso sea costoso en tiempo y medios. Los métodos de un paso en estas ocasione pueden no ser adecuados porque requieren muchos cálculos. En cambio los métodos multipasos requieren menos cálculos. Por ejemplo el método de Runge-Kutta requiere cuatro evaluaciones de la función f en cada etapa, mientra que los métodos multipasos sólo requieren una si se han ido guardando las evaluaciones anteriores. Como hemos señalado antes, si se emplea un método predictor-corrector, como el método Adams-Bashforth-Moulton, se puede ganar en precisión repitiendo el corrector pero cada vez que usa el corrector hay que evaluar una vez más la función f con lo que se pierde una parte de la ventajas de estos métodos con respecto a los métodos de un sólo paso. En la práctica el corrector se utiliza sólo una vez y si se observa que hay grandes diferencias entre los valores de la aproximación obtenida por el predictor y el corrector, entonces se reinicia el proceso a partir de ese punto con un paso menor. Por este procedimiento, si no es preciso reiniciar muchas veces el proceso, se obtiene un método de paso múltiple con paso variable que requiere un número menor de evaluaciones de la función f que los métodos análogos de un paso como el Runge-Kutta-Fehlberg.

APÉNDICE A

Tabla de primitivas

a) $\displaystyle\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad (\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1),$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,$

c) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C,$

d) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C,$

e) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C,$

f) $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C,$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx = \operatorname{tg} x + C,$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int (1+\operatorname{cotg}^2 x)\,dx = -\operatorname{cotg} x + C,$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x\right| + C,$

j) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen} x}\,dx = \ln\left|\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{cotg} x\right| + C,$

k) $\displaystyle\int e^{x}dx = e^{x} + C,$

l) $\displaystyle\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, \qquad (a > 0),$

m) $\displaystyle\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C,$

n) $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C,$

ñ) $\displaystyle\int \operatorname{th} x\,dx = \ln(\cosh x) + C,$

o) $\displaystyle\int \coth x\,dx = \ln|\operatorname{senh} x| + C,$

p) $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \operatorname{th} x + C,$

q) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{senh}^2 x}\,dx = \coth x + C,$

r) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arctg} x + C,$

s) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C = \operatorname{arg\,senh} x + C,$

t) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C = \operatorname{arg\,cosh} x + C,$

u) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen} x + C = -\operatorname{arc\,cos} x + C'.$

Bibliografía

[1] Adkins W.A. y Davidson M.G. *Ordinary Differential Equations*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2012.

[2] Agarwal R.P. y O'Regan D. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. Universitext (1979). Springer, 2008.

[3] Arnold V.I. *Ordinary differential equations*. Universitext (1979). Springer, 2006.

[4] Arnold V.I. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften. Springer London, Limited, 2012.

[5] Arrowsmith D.K. y Place C.M. *Ordinary differential equations: a qualitative approach with applications*. Chapman and Hall mathematics series. Chapman and Hall, 1982.

[6] Arrowsmith D.K. y Place C.M. *Dynamical systems. Differential equations, maps and chaotic behaviour*. Chapman and Hall Mathematics Series. Chapman & Hall, London, 1992.

[7] Bali N. *Golden Differential Equations*. Golden maths series. Laxmi Publications Pvt Limited, 2006.

[8] Blanchard P., Devaney R.L. y Hall G.R. *Ecuaciones Diferenciales*. Matemáticas Thompson. International Thomson, 1999.

[9] Blanchard P., Devaney R.L. y Hall G.R. *Differential Equations*. Brooks/Cole, 2011.

[10] Boelkins M.R., Goldberg J.L. y Potter M.C. *Differential equations with linear algebra*. Oxford University Press, Oxford, 2009.

[11] Borrelli R.L. y Coleman C.S. *Differential Equations: A Modeling Perspective*. John Wiley & Sons, 2004.

[12] Boyce W., DiPrima R. y University T.A..M. *Elementary Differential Equations*. Wiley Custom Learning Solutions, 2011.

[13] Boyce W.E. y DiPrima R.C. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.* Limusa Wiley, 2010.

[14] Brannan J.R. y Boyce W.E. *Differential Equations: An Introduction to Modern Methods & Applications 2nd Edition Binder Ready Version.* John Wiley & Sons, 2010.

[15] Braun M. *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones.* Grupo Editorial Iberoamérica, 1990.

[16] Braun M. *Differential Equations and Their Applications: An Introduction to Applied Mathematics.* Texts in Applied Mathematics. Springer, 1992.

[17] Campbell S.L. y Haberman R. *Introduction to Differential Equations with Dynamical Systems.* Princeton University Press, 2011.

[18] Chicone C. *Ordinary Differential Equations with Applications.* Texts in Applied Mathematics. Springer, 2010.

[19] Coddington E.A. *An Introduction to Ordinary Differential Equations.* Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publications, 1989.

[20] Coddington E.A. y Carlson R. *Linear Ordinary Differential Equations.* Miscellaneous Bks. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104), 1997.

[21] Coddington E.A. y Levinson N. *Theory of ordinary differential equations.* International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1955.

[22] Edwards C.H. y Penney D.E. *Ecuaciones Diferenciales.* Pearson Educación, 2001.

[23] Fernández Pérez C., Hernández Vázquez F.J. y Vegas Montaner J.M. *Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias: Sistemas Dinamicos.* Ciencia y técnica. Paraninfo, Editorial S. A., 2003.

[24] Goode S. y Annin S. *Differential Equations and Linear Algebra.* Pearson international edition. Pearson Prentice Hall, 2007.

[25] Hirsch M.W., Smale S. y Devaney R.L. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos.* Academic Press. Academic Press, 2012.

[26] Kiseliov A., Krasnov L. y Makarenko G.I. *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.* Fondos Distribuidos. Mir, 1992.

[27] Krantz S. *Differential Equations Demystified.* Demystified Series. McGraw-Hill Companies,Incorporated, 2004.

[28] Logan J.D. *A First Course in Differential Equations.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2010.

[29] López Rodríguez M. *Problemas Resueltos de Ecuaciones Diferenciales.* Paso a Paso. Thomson-Paraninfo, 2007.

[30] Ricardo H. *Ecuaciones diferenciales: una introducción moderna.* Reverte Editorial Sa, 2008.

[31] Ricardo H.J. *A Modern Introduction to Differential Equations.* Elsevier Science, 2009.

[32] Robinson J.C. *An Introduction to Ordinary Differential Equations.* Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2004.

[33] Simmons G.F. *Ecuaciones diferenciales: Con aplicaciones y notas históricas.* McGraw-Hill, 1980.

[34] Simmons G.F. y Robertson J.S. *Ecuaciones diferenciales: Con aplicaciones y notas históricas.* McGraw-Hill, 1996.

[35] Zill D.G. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado.* Cengage Learning, 2009.

[36] Zill D.G. *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications.* Cengage Learning, 2012.

Índice alfabético